[美] M. 克莱因 著

古今数学思想

上海科学技术出版社

古今数学思想

(第二册)

〔美〕M. 克莱因 著
北京大学数学系数学史翻译组译
申又枨 江泽涵 冷生明 等校

上海科学技术出版社

MATHEMATICAL THOUGHT
FROM ANCIENT TO MODERN TIMES
Morris Kline
Oxford Univ. Press, New York, 1972

古今数学思想

(第二册)

〔美〕M. 克莱因 著
北京大学数学系数学史翻译组译
申又枨 江泽涵 冷生明 等校

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海东方印刷厂印刷
开本 850×1156 1/32 印张 12.625 字数 310,000
1979 年 8 月第 1 版 1986 年 1 月第 4 次印刷
印数：72,401—84,300

书号：13119·768 定价：1.90 元

翻译说明

很多数学工作者、数学教师和爱好数学的同志，早就希望能有一本比较简明的、阐述一些重要数学思想的来源和发展的书。看到 Morris Kline 教授写的这本 Mathematical Thought from Ancient to Modern Times (1972)，我们感到相当满意，就组织人力把它翻译了出来。

这本书，内容丰富，全面地论述了近代数学大部分分支的历史发展；篇幅不大，简明扼要。正如书名所指出的，本书着重在论述数学思想的古往今来，而不是单纯的史料传记，努力说明数学的意义是什么，各门数学之间以及数学和其他自然科学尤其是和力学、物理学的关系是怎样的。本书厚今薄古，主要篇幅是叙述近二、三百年的数学发展，着重在十九世纪，有些分支写到本世纪的三十或四十年代。作者对一些重要数学分支的历史发展，对一些著名数学家的评论，都很有一些独到的见解，并且写得很引人入胜。Morris Kline 教授本人，深受 Göttingen 大学数学传统的影响，注意研究数学史和数学教育，是一位著名的应用数学家和数学教育家，因此，他很能体会读者的心情，在书中能通过比较丰富的史料来阐述观点，把科目的历史叙述和内容介绍结合起来。另外，为了方便读者，许多古代的数学成就或资料，都翻译成近代数学的语言，通俗易懂。这些都是本书突出的优点。

当然，本书也有不足之处。例如忽视了我国的数学成就及其对数学发展的影响，这对于论述数学的发展来说，无疑是有片面性的。关于对现代数学高度抽象这一特征的看法，作者是持一定保留态度的。他的这种态度，给本书带来了某种倾向性，我们认为这

是可以商榷的．另外，关于数学中的有些问题，在历史上一直是争论不休的，而数学就在这种争论中发展着；作者的一些看法，也只是一家之言，还是值得研究的．但是总的看来，本书仍不失为一本难得的好书．外国的书评也说："就数学史而论，这是迄今为止最好的一本．"*)

原书五十一章共1238页，我们把译本分成四册出版．为便于读者了解全书，在每册中我们都印上原作者的序，并附上其余各册的目录．

参加本书翻译的有江泽涵(序言、第50章)、张锦炎(第11、12章)、申又枨(第15、16章)、朱学贤(第17、18、25、42章)、钱敏平(第19章)、邓东皋(第20、45、46、47章)、丁同仁(第21章)、刘西垣(第22章)、叶其孝(第23、24、40章)、庄圻泰(第26、27章)、万伟勋(第28、29、30章)、石生明(第31、32、33章)、张顺燕(第34章)、姜伯驹(第35章)、章学诚(第37、48章)、程民德(第41章)、张恭庆(第43、44章)、聂灵沼(第49章)、吴光磊(第51章)．我们特邀张理京同志翻译了第1～10、13、14章、北京工业学院孙树本教授翻译了第36、38、39章．第一册是张理京同志校阅的；参加第二册校阅的有申又枨、江泽涵、冷生明；第三册主要由冷生明校阅，其中有一部分是张理京校阅的；第四册由申又枨、冷生明校阅了大部分．另外，叶其孝、朱学贤两同志参加校阅了全书的部分章节，并协同做了许多组织工作．申又枨教授生前十分关心本书的翻译出版，病中还亲自参加本书的翻译与校阅工作．不幸在本书付印之前，他已与世长辞．这本书的出版，也是对申又枨同志的一个纪念．

本书是1976年初组织翻译的．广大数学工作者、上海科学技术出版社和校内外的许多同志，给予我们大力支持和帮助，使这译本得以和广大读者见面．我们希望本书的翻译出版，能增进读者

*) 见 Bulletin of the American Mathematical Society, 1974,9, Vol. 80, No. 5, pp. 805～807.

对数学史和数学本身的了解，对数学的教学改革、以及对数学和数学史的研究有所裨益. 限于水平，译文一定有许多不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

北京大学数学系数学史翻译组 邓东皋

1978. 7. 11.

序

> 如果我们想要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。
>
> Henri Poincaré

本书论述从古代一直到本世纪头几十年中的重大数学创造和发展．目的是介绍中心思想；特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的、并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作．本书所极度关心的还有：对数学本身的看法，不同时期中这种看法的改变，以及数学家对于他们自己的成就的理解．

必须把本书看作是历史的一个概述．当人们想到 Euler 的全集满满的约七十卷，Cauchy 的二十六卷，Gauss 的十二卷，人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述．本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本，可是我坚信这些样本最具有代表性．再者，为着把注意力始终集中于主要的思想，我引用定理或结果时，常常略去严格准确性所需要的次要条件．本书当然有它的局限性，但我相信它已给出整个历史的一种概貌．

本书的组织着重在居领导地位的数学课题，而不是数学家．数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印，并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用．但是，特意叙述的是他们的思想，传记完全是次要的．在这一点上，我遵循 Pascal 的意见："当我们援引作者时，我们是援引他们的证明，不是援引他们的姓名．"

为使叙述连贯，特别是在1700年以后的时期，对于每一发展要等到它已经成熟、在数学中占重要地位并且产生影响的时候，我才进行论述. 例如，我把非欧几里得几何放在十九世纪的时期介绍，虽然企图寻找欧几里得平行公理的替代物或证明早在Euclid时代就开始了并且继续不断. 当然，有许多问题会在不同的时期反复提及.

为着不使资料漫无边际，我忽略了几种文化，例如中国的[1]、日本的和玛雅的文化，因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响. 还有一些数学中的发展，例如概率论和差分演算，它们今天变得重要，但在所考虑的时期中并未起重要作用，从而也只得到很少的注意. 这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些二十世纪的，并且在该时期变成有特殊意义的创造. 我没有在二十世纪时期继续讨论象常微分方程或变分法的扩展，因为这将会需要很专门的资料，而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣，并且将会大大增加本书的篇幅. 此外还考虑到，对于许多较新的发展的重要性，目前还不能作客观的估价. 数学的历史告诉我们，许多科目曾经激起过很大的热情，并且得到最好的数学家的注意，但终于湮没无闻. 我们只需要回忆一下Cayley的名言：射影几何就是全部几何，和Sylvester的断言：代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华. 确实的，历史给出答案的有趣问题之一便是：数学中哪些东西还生存着而未被淘汰？历史作出它自己的而且更可靠的评价.

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述，也不能指望读者知道所有这些发展的内容. 因此，我在本书中论述某科目的历史时，除去一些极初等的领域外，也说明科目的内容，把科目的历史叙述和内容说明融和起来. 对各种数学创造，这些说明也许不能

(1) 中国数学的历史的一个可喜的叙述，已见于Joseph Needham的*Science and Civilization in China*，剑桥大学出版社，1959，卷3，第1～168页.

把它们完全讲清楚，但应能使读者对它们的本质得到某些概念．从而，在某种程度上，本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书．这无疑地是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一．

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助．专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去，使得他没有机会去熟悉他的学科的历史．而实际上，这历史背景是重要的．现在的根，深扎在过去，而对于寻求理解"现在之所以成为现在这样子"的人们来说，过去的每一事件都不是无关的．再者，虽然数学大树已经伸张出成百的分支，它毕竟是一个整体，并且有它自己的重大问题和目标．如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献，它们就不会开花结果．我们的被分裂的学科就面临着这种危险；跟这种危险作斗争的最稳妥的办法，也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识，使得能把研究工作导入有成果的渠道．如同 Hilbert 所说的："数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合．"

对于学数学的学生来说，本书还会另有好处．通常一些课程所介绍的是一些似乎没有什么关系的数学片断．历史可以提供整个课程的概貌，不仅使课程的内容互相联系，而且使它们跟数学思想的主干也联系起来．

在一个基本方面，通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉．它们给出一个系统的逻辑叙述，使人们有这种印象：数学家们几乎理所当然地从定理到定理，数学家能克服任何困难，并且这些课程完全经过锤炼，已成定局．学生被湮没在成串的定理中，特别是当他正开始学习这些课程的时候．

历史却形成对比．它教导我们，一个科目的发展是由汇集不同方面的成果，点滴积累而成的．我们也知道，常常需要几十年，甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步．不但这些科目并未锤

炼成无缝的天衣，就是那已经取得的成就，也常常只是一个开始，许多缺陷有待填补，或者真正重要的扩展还有待创造.

课本中的字斟句酌的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个可观的结构之前，数学家所经历的艰苦漫长的道路. 学生一旦认识到这一点，他将不仅获得真知灼见，还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气，并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧. 实在说，叙述数学家如何跌跤，如何在迷雾中摸索前进，并且如何零零碎碎地得到他们的成果，应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气.

为着使本书能包罗所涉及的这个大范围，我曾经试着选择最可靠的原始资料. 对于微积分以前的时期，象 T. L. Heath 的《希腊数学史》(*A History of Greek Mathematics*) 无可否认地是第二手的资料，可是我并未只依靠这样的一个来源. 对于以后时期中的数学发展，通常都能直接查阅原论文；这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到. 对研究工作的大量报导和概述也帮助了我，其中一些实际上也就在全集里. 对于所有的重要结果，我都试着给出出处. 但并没有对于所有的断言都这么做；否则将会使引证泛滥，浪费篇幅，而这些篇幅还不如用来充实报导.

每章中的参考书目指出资料来源. 如果读者有兴趣，他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报导. 这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献. 把它们列在书目中，是因为它们供给额外的报导，或者表达的水平可以对一些读者更有帮助，或者它们比原始资料更易于找到.

在此，我想对我的同事 Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro 和 Marvin Tretkoff 表示谢意，感谢他们回答了大量的问题，阅读了本书的许多章节，提出了许多宝贵的批评意见. 我特别感激我的妻子 Helen，她以批评的眼光编辑我的手稿，

广泛地核对人名、日期和出处，而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码. Eleanore M. Gross 夫人做了大量的打字工作，对我是一个极大的帮助. 我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激，感谢他们细心地印刷了本书.

Morris Kline

纽约 1972 年 5 月

第二册目录

其他三册简目

第一册

第三册

第四册

15

坐 标 几 何

……我决心放弃那个仅仅是抽象的几何．这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来练习思想的问题．我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何．

René Descartes

1．坐标几何的缘起

Fermat 和 Descartes是数学中下一个巨大创造的主要负责人，他们和 Desargues 及其追随者一样，关心到曲线研究中的一般方法．但他们两人在很大程度上参加了科学研究工作，敏锐地看到了数量方法的必要性，而且注意到代数具有提供这种方法的力量．因此，他们就用代数来研究几何．他们所创立的科目叫做坐标几何或解析几何，其中心思想是把代数方程和曲线曲面等联系起来．这个创造是数学中最丰富最有效的设想之一．

科学的需要和对方法论的兴趣推动了 Fermat 和 Descartes 对坐标几何的研究，这是无可怀疑的．Fermat 对于微积分的贡献，如作曲线的切线，计算最大值和最小值等(这些将在后面讲到微积分的历史时，更清楚地说明)，是为解答科学问题而设计的．他还对光学做了第一等的贡献．他对方法论的兴趣，在他的一本小书«平面和立体的轨迹引论»(*Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*)[1]中的一个明白的叙述里得到证实(此书写于 1629 年，但 1679 年才出版)[2]．他在书中说，他找到了一个研究有关曲线问

(1) Fermat 是在 Pappus 所解释的意义下用这些名词的，参看第 8 章第 2 节。

(2) *Œuvres*, 1, 91～103。

题的普遍方法. 至于 Descartes, 他是十七世纪中最大的科学家之一,他把方法论作为他一切工作的首要对象.

2. Fermat 的坐标几何

在他的数论工作中, Fermat 从 Diophantus 出发. 他关于曲线的工作, 则从研究希腊的几何学家, 特别是 Apollonius 开始, Apollonius 的«论平面轨迹»(*On Plane Loci*)一书, 久已失传, 而 Fermat 却是把它重新写出的人之一. 他对代数做了贡献之后, 准备把它用来研究曲线. 这一点他在上述小书«轨迹引论»中做了. 他说他打算发起一个关于轨迹的一般研究, 这种研究是希腊人没有做到的. Fermat 的坐标几何究竟是怎样产生的, 我们不知道. Fermat 是熟悉 Vieta 用代数解决几何问题的用法的,但更可能的是他把 Apollonius 的结果直接翻译成代数的形式.

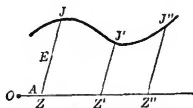


图 15.1

他考虑任意曲线和它上面的一般点 J(图 15.1). J 的位置用 A、E 两字母定出: A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离, E 是从 Z 到 J 的距离. 他所用的坐标就是我们所说的倾斜坐标,但是 y 轴没有明白出现, 而且不用负数. 他的 A、E 就是我们的 x、y.

Fermat 早就叙述出他的一般原理: "只要在最后的方程里出现了两个未知量, 我们就得到一个轨迹, 这两个量之一,其末端就描绘出一条直线或曲线." 图中对于不同位置的 E, 其末端 J, J', J'',…就把"线"描出. 他的未知量 A 和 E,实际上是变数,或者可以说,联系 A 和 E 的方程是不确定的. 在这里, Fermat 用 Vieta 的办法, 让一个字母代表一类的数, 然后写出联系 A 和 E 的各种方程, 并指明它们所描绘的曲线. 例如, 他写出"*D in A aequetur*

B in E"(用我们的记号就是 $Dx=By$)并指明这代表一条直线. 他又给出(以下用我们的写法) $d(a-x)=by$, 并肯定它也代表一条直线. 方程 $B^2-x^2=y^2$ 代表一个圆, $a^2-x^2=ky^2$ 代表一个椭圆, $a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a$ 各代表一条双曲线, 而 $x^2=ay$ 代表一条抛物线. 因 Fermat 不用负坐标, 他的方程不能象他所说代表整个曲线, 但他确实领会到坐标轴可以平移或旋转, 因为他给出一些较复杂的二次方程, 并给出它们可以简化到的简单形式, 他肯定: 一个联系着 A 和 E 的方程, 如果是一次的, 就代表直线轨迹, 如果是二次的, 就代表圆锥曲线. 在他的《求最大值和最小值的方法》(*Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*, 1637)[3]中, 他引进了曲线 $y=x^n$ 和 $y=x^{-n}$.

3. René Descartes

Descartes 是第一个杰出的近代哲学家, 是近代生物学的奠基人, 是第一流的物理学家, 但只偶然地是个数学家. 不过, 象他那样富于智力的人, 即使只花一部分时间在一个科目上, 其工作也必定是很有意义的.

他于 1596 年 3 月 31 日出生在土伦的拉哈耶 (La Haye in Touraine) 地方. 他父亲是个相当富有的律师. 当他八岁的时候, 他父亲把他送进昂茹的拉弗莱希 (La Flèche in Anjou) 地方的一个耶稣会学校. 因为他身体不好, 被允许每天早上在床上工作, 这习惯他一直保持到老. 他十六岁离开拉弗莱希, 二十岁毕业于普瓦界 (Poitiers) 大学, 去巴黎当律师. 在那里他遇见 Mydorge 和 Marin Mersenne 神甫, 花了一年的时间和他们一起研究数学. 但他却变得不安静起来, 而于 1617 年投入了奥拉日的 Maurice 王子的军队. 在那以后的九年里, 他时而在几个军队中服役, 时而在巴黎狂

(3) *Œuvres*, 1, 133~179; 3, 121~156.

欢作乐，但一直继续研究数学. 在荷兰布莱达(Breda)地方的招贴牌有一个挑战性的问题，他给解决了，这使他自信有数学才能，从而开始认真地用心于数学. 他回到巴黎，为望远镜的威力所激动，闭门钻研光学仪器的理论与构造. 1628年他移居到荷兰，得到较为安静自由的学术环境. 他在那里住了二十年，写出了他的著名作品. 1649年他被邀请去瑞典做Christina女皇的教师，他为王室的尊崇与荣誉所吸引，接受了这一邀请. 1650年他在那里患肺炎逝世.

他的第一部著作«思想的指导法则»(*Regulae ad Directionem Ingenii*)[4]是1628年写成的，但在他死后才出版. 他的第二部重要著作«世界体系»(*Le Monde*, 1634)，包括一个宇宙漩涡理论，是用来说明行星是如何转动不息而且保持在它们绕日的轨道中的. 但他害怕教会的迫害，没有发表. 1637年，他出版了他的«更好地指导推理和寻求科学真理的方法论»(*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*)[5]. 此书是文学和哲学的经典著作，包括三个著名的附录：«几何»、«折光»(*La Dioptrique*)和«陨星»(*Les Météores*). 其中«几何»部分，包括了他关于坐标几何和代数的思想. 这是Descartes所写的唯一的数学书，虽然他在许多通信中，也确实传播过许多其他关于数学的思想. «方法论»一书，立刻给他带来了很大的声誉. 随着时间的流逝，他和他的群众，更加注意他的著作. 1644年，他发表了«哲学原理»(*Principia Philosophiae*)，专论物理科学特别是运动定律和漩涡理论. 此书也包括«世界体系»中的材料，他相信这次已经写得使教会容易接受些. 1650年他发表了«音乐概要»(*Musicae Compendium*).

Descartes的科学思想，支配着十七世纪. 他的教导和著作，

(4) 1692年用荷兰文出版；*Œuvres*, 10,359～469.

(5) *Œuvres*, 6, 1～78.

因为表达得非常清楚动人，甚至在非科学家中间也很通行．只有教会排斥他．实际上 Descartes 是虔诚的，并且他相信他已经证明了上帝的存在，因而感到高兴．但他教导说，圣经不是科学知识的来源，只凭理性就足以证明上帝的存在，并且说，人们应该只承认他所能了解的东西．教会对他这些话的反应是：在他死后不久，就把他的书列入«禁书目录»(*Index of Prohibited Books*)，并且当在巴黎给他举行葬礼的时候，阻止给他致悼词．

Descartes 是通过三条途径来研究数学的：作为哲学家，作为自然的研究者，作为一个关心科学的用途的人．试图把这三条思路分离开来是困难的，而且也许是不实际的．他生活在清教与天主教间的争论达到高潮的时代，又在科学刚刚开始发现出一些向主要的宗教教条挑战的自然规律的时代．因此，他就开始怀疑他在学校里所得到的一切知识．早当他在拉弗莱希结束了课业的时候，他就断定他所受的教育仅仅加重了他的烦闷．他是这样地为他的怀疑所困扰，以至他相信除了认识到他自己的无知外，没有什么进步．但是，由于他曾在欧洲最著名学校之一里呆过，又由于他相信他在那里不是一个劣等生，他感到有理由去怀疑在任何地方有没有可靠的成套知识．于是他就想这个问题：我们是怎样知道一些东西的？

但他不久就断定逻辑本身是无结果的："谈到逻辑，它的三段论和其他观念的大部分，与其说是用来探索未知的东西，不如说是用来交流已知的东西，或者用来无判断地空谈我们所不知道的东西．"所以逻辑不能提供基本的真理．

但是，到哪里去找基本真理呢？他排斥了通行的、大部分是经院派的哲学，说它虽然有吸引力，但显得没有明确的基础，而且所用的推理法并不总是无可非议的．他说，哲学仅仅提供一个"从表面上看来是到处为真的讨论工具．"神学指出了上天堂去的道路，他自己也和别人一样激动着要上那儿去，但这条道路是正确的吗？

在一切领域里建立真理的方法，据他说，是在1619年11月10日出现在他梦里的，那时他正在一次军事行动中，那个方法就是数学方法. 他为数学所吸引是因为它的立足于公理上的证明是无懈可击的，而且是任何权威所不能左右的. 数学提供了获得必然结果以及有效地证明其结果的方法. 此外，Descartes 还清楚地看到，数学方法超出他的对象之外. 他说："它是一个知识工具，比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力，因而他是所有其他知识工具的源泉."在这同一个意向下，他写道：

> ……所有那些目的在于研究顺序和度量的科学，都和数学有关. 至于所求的度量是关于数的呢，形的呢，星体的呢，声音的呢，还是其他东西的呢，都是无关紧要的. 因此，应该有一门普遍的科学，去解释所有我们能够知道的顺序和度量，而不考虑他们在个别科学中的应用. 事实上，通过长期使用，这门科学已经有了它自身的专名，这就是数学. 它之所以在灵活性和重要性上远远超过那些依赖于它的科学，是因为它完全包括了这些科学的研究对象和许许多多的别的东西.

他于是就作出结论："几何学家惯于在困难的证明中用来达到结论的成长串的简单而容易的推理，使我想到：所有人们能够知道的东西，也同样是互相联系着的."

从他的数学方法的研究中，他抽出了(并且写进了他的«思想的指导法则»一书里)在任何领域中获得正确知识的一些原则：不要承认任何事物是真的，除非它在思想上明白清楚到毫无疑问的程度；要把困难分成一些小的难点；要由简到繁，依次进行；最后，要列举并审查推理的步骤，要做得彻底，使毫无遗漏的可能.

这些是他从数学家的实践中提炼出来的方法要点. 他希望用这些要点，去解决哲学、物理学、解剖学、天文学、数学和其他领域

中的问题. 虽然这个大胆的计划并未成功, 但他确实对于哲学、科学和数学,做出了可观的贡献.心的直观力量(即对于基本的、清楚的、明显的真理的直接了解)和演绎推理,是他的知识哲学的要素. 用别的方法得来的所谓知识,由于有错误的嫌疑和危险性,都应该摒弃.

他在《方法论》中所写的三个附录, 就是为了证明他的方法是有效的,他相信他已经证明了.

Descartes 创立了近代哲学. 我们不能详细叙述他的系统, 只能注意其中与数学有关的几点. 在哲学中, 他找出了一些明白到他可以立刻接受的真理作为公理, 最后他定出四条: (a)我想, 所以我在; (b)每一现象必有原因; (c)效果不能大于它的原因; (d)心中本来就有完美、空间、时间和运动的观念. 根据(c), 完美的观念(即"完美的东西"的观念)不能从人的不完美的心中推导或创造出来,它只能从一个完美的东西得到.因此,上帝存在.因为上帝不欺骗我们,所以我们就能保证: 在直观上很明白的数学公理,以及通过纯粹的思想程序从这些公理得出来的推论, 确实可应用于物理世界,因而它们都是真理. 由此可见,上帝一定是按照数学定律来建立自然界的.

对于数学本身,他相信他有明白而清楚的数学概念,例如三角形的概念. 这些概念确实存在, 而且是永恒的、不变的, 它们的存在,不依赖于人是否正想着它们. 因此,数学是永恒地客观地存在着的.

Descartes 的第二个主要兴趣, 是大多数和他同时代的思想家所共有的,这就是对自然界的了解.他用了许多年的时间在科学问题上,甚至广泛地做了力学、水静力学、光学和生物学方面的实验. 他的漩涡理论是十七世纪中最有势力的宇宙学. 他是机械论哲学的奠基人.这个机械论说: 一切自然现象包括人体的作用,都可归结到服从于力学定律的运动,但 Descartes 却把灵魂除外. 他对于

光学、特别对于透镜的设计感兴趣；他的《几何》的一部分和《折光》都是讲光学的．他和 Willebrord Snell 分享了发现折光定律的荣誉．他的科学工作，和他的哲学工作一样，是根本性的而且是革命性的．

Descartes 的科学工作的另一重要之点，是强调要把科学成果付之应用(第 11 章第 5 节)．在这一点上，他同希腊人明白地公开地决裂．为了人类的幸福而去掌握自然，他追究了许多科学问题．由于他注意到数学的力量，他自然会给它寻找用途；对他来说，数学不是思维的训练，而是一门建设性的有用科学．他与 Fermat 不同，几乎不注意美与协调性．他不推崇纯粹数学，认为把数学方法只用到数学本身是没有价值的，因为这不是研究自然．那些为数学而搞数学的人，是白费精神的盲目的研究者．

4．Descartes 在坐标几何方面的工作

Descartes 既然断定方法的重要性，并断定数学可以有效地应用到科学上去，他就把方法应用到几何．在这里，他对方法的普遍兴趣和他对代数的专门知识，就组成联合力量．他对于下述事实，深感不安：Euclid 几何中每一证明，总是要求某种新的、往往是奇巧的想法．他明白地批评希腊人的几何过于抽象，而且过多地依赖于图形，以至“它只能使人在想象力大大疲乏的情况下，去练习理解力．”他对当时通行的代数也加以批评，说它完全受法则和公式的控制，以至于“成为一种充满混杂与晦暗、故意用来阻碍思想的艺术，而不象一门改进思想的科学．”他因此主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相以长补短．

事实上，他所着手开发的，是把代数用到几何上去．他完全看到代数的力量，看到它在提供广泛的方法论方面，高出希腊人的几何方法．他同时强调代数的一般性，以及它把推理程序机械化和把

解题工作量减小的价值. 他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力. 他把代数应用到几何的产物, 是他的《几何》一书.

虽然他在这本书里用了改进的记号(这在第13章已提到), 但这本书是不容易读的; 许多模糊不清之处是故意搞的, 他自吹说欧洲几乎没有一个数学家能懂他的著作; 他只约略指出作图法和证法, 而留给别人去填入细节. 他在一封信里, 把他的工作比作建筑师的工作, 即立下计划, 指明什么是应该做的, 而把手工操作留给木工与瓦工. 他还说: "我没有做过任何不经心的删节, 但我预见到: 对于那些自命为无所不知的人, 我如果写得使他们能充分理解, 他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西." 在《几何》中, 他又给了一些别的理由, 例如, 他不愿夺去读者们自己进行加工的乐趣. 后来有人给此书写了许多评注, 使它易于了解.

他的思想必须从他书中许多解出的例题里去推测. 他说, 他之所以删去绝大多数定理的证明, 是因为如果有人不嫌麻烦而去系统地考查这些例题, 一般定理的证明就成为显然的了, 而且照这样去学习是更为有益的.

在《几何》中, 他开始仿照 Vieta 的方式, 用代数来解决几何作图的问题; 后来才逐渐地出现了用方程表示曲线的思想. 他首先指出, 几何作图要求对线段作加减乘除, 对特别的线段取平方根, 因为这几种运算也包括在代数里, 所以它们都可用代数的术语表出.

在考虑作图问题时, Descartes 说, 我们必须假定问题已经解决, 而用字母表示所有那些看来是作图所必需的已知和未知的线段; 然后, 不管线段是已知的还是未知的, 我们必须这样去解除困难: 弄清楚这些线段之间的相互关系, 使得同一个量能够用两种方式表示出来, 这样就得到一个方程. 我们必须求出与未知线段数目相同的方程. 如果方程不止一个, 我们必须把它们组合起来, 使得最后只剩下一个方程, 其中只有一个未知的线段, 用已知的线段表出. Descartes 然后说明怎样利用该未知线段的代数方程来把

它画出.

例如,假定某几何问题归结到寻求一个未知长度 x, 经过代数运算知道 x 满足方程 $x^2=ax+b^2$, 其中 a, b 是已知长度. 于是由代数学得出

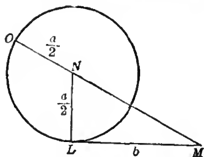


图 15.2

$$(1)\qquad x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$$

(Descartes 不考虑负根). 他画出 x 如下: 作直角三角形 NLM (图 15.2), 其中 $LM=b$, $NL=\frac{a}{2}$. 延长 MN 到 O, 使 $NO=NL=\frac{a}{2}$. 于是 x 就是 OM 的长度. Descartes 没有证明这个结论的正确性,但是很明显

$$OM=ON+MN=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}.$$

这就是说,由解一个代数方程而得到的(1)式,指明了 x 的画法.

在第一卷书的前一半中, Descartes 用代数解决的, 只是古典的几何作图问题.这是代数在几何上的一个应用,并不是现代意义下的解析几何. 以上所说的问题,可以叫做确定的作图问题,因为结果是一个唯一的长度. Descartes 下一步考虑不确定问题, 其结果有许多长度可以作为答案.这些长度的端点充满一条曲线;他在这里说,“也要求发现并且描出这条包括所有端点的曲线.”曲线的描出,根据于最后得到的不定方程,此方程把未知的长度 y 用任意的长度 x 表出. 对此, Descartes 着重指出, 对于每个 x, 长度 y 满足一个确定方程, 因而可以画出. 如果方程是一次的或二次的, 就可以按照第一卷的方法, 用直线和圆把 y 画出; 对于高次方程, 他说将在第三卷中说明怎样画 y.

Descartes 用 Pappus (第 5 章第 7 节)的问题来说明当问题归结到一个含有两个未知长度的方程时该怎么办. 这问题(他并没有

普遍地解出)的叙述如下. 在平面上给定三条直线, 求所有这样的点的位置(即轨迹): 从这点作三条直线各与一条已知线交于已知角(三个角不一定相同), 使在所得的三条线段中, 某两条的乘积(指长度的乘积)与第三条的平方成定比. 如果给定四条直线, 画法同上, 但要求在所得的四条线段中, 某两条的乘积, 与其余两条的乘积成定比. 如果给定五条直线, 画法仍同上, 但要求在所得的五条线段中, 某三个的乘积与其余两个的乘积成定比. 如果给定的直线多于五条, 作法照此类推.

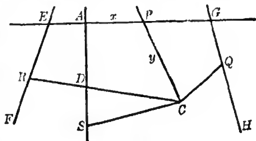


图 15.3

Pappus 曾宣称, 当给定的直线是三条或四条时, 所得的轨迹是一条圆锥曲线. 在第二卷中, Descartes 处理了四条直线时的 Pappus 问题. 设给定的线(图 15.3)是 AG, GH, EF 和 AD. 考虑一点 C, 从点 C 引四线各与一条已知线交于已知角(四个角不一定相同), 把所得的四条线段记为 CP, CQ, CR 和 CS. 要求找出满足条件 $CP\cdot CR=CS\cdot CQ$ 的点 C 的轨迹.

Descartes 记 AP 为 x, 记 PC 为 y. 经过简单的几何考虑, 他从已知量得出 CR, CQ 和 CS 的值. 把这三个值代入 $CP\cdot CR=CS\cdot CQ$, 他就得到一个 x 和 y 的二次方程

$$y^2=Ay+Bxy+Cx+Dx^2, \tag{2}$$

其中 A, B, C, D 是由已知量组成的简单的代数式. 于是他指出, 如果任意给 x 一个值, 就得到一个 y 的二次方程; 从这个方程可以解出 y, 于是就能用直尺和圆规把 y 画出, 象在第一卷里那样. 由此可知, 如果我们取无穷多个 x 值, 就得到无穷多个 y 值, 从而得到无穷多个点 C. 所有这些 C 点的轨迹, 就是方程(2)所代表的曲线.

Descartes 的做法, 是选定一条线(图 15.3 中的 AG)作为基

线,以点 A 为原点. x 值是基线上的长度,从 A 量起; y 值是一个线段的长度,由基线出发,与基线作成一个固定的角度. 这个坐标系,我们现在叫做倾斜坐标系. Descartes 的 x, y 只取正值,他的图局限在第一象限之内,但方程(2)所代表的曲线却无此限制. Descartes 简单地假定轨迹根本上位于第一象限之内;只附带地说了一下在第一象限外可能出现的情况,他又不自觉地假定了对于每个正实数有一个长度.

有了曲线方程的思想之后,Descartes 就进一步发展这个思想.他断言,容易证明曲线的次与坐标轴的选择无关. 他指出这个轴要选得使最后得到的方程愈简愈好.他又迈出另外一大步,这就是考虑两个不同的曲线,用同一坐标轴来写出它们的方程,并且联立地解出这两个方程来求出这两条曲线的交点.

也是在第二卷里,Descartes 批判地考虑了希腊人关于平面曲线、立体曲线和线性曲线的区别. 希腊人说,平面曲线是可以用圆规和直尺画出的曲线,立体曲线是圆锥曲线,其余的都是线性曲线,例如蚌线,螺线,割圆曲线和蔓叶线.希腊人也把线性曲线叫做机械曲线,因为需要用某些特殊机械来画出它们. 但是 Descartes 说,就是直线和圆,也需要一些工具.机械作图的准确性是无关紧要的,因为在数学上只有推理才算数.他继续说,古人反对线性曲线可能是因为它们的定义不可靠. 本此理由,Descartes 排斥了这种思想:只有用直尺和圆规画出的曲线是合法的[6]. 他甚至提出一些用机械画出的新的曲线. 他用一句高度有意义的话来作结论:几何曲线是那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程来表出的曲线.因此,Descartes 承认蚌线和蔓叶线是几何曲线,其他如螺线和割圆曲线等,他都叫做机械曲线.

Descartes 坚持:可以认为是曲线的,是具有代数方程的那一种. 这就开始取消了曲线是否存在看它是否可以画出这个判别标

(6) 比较第 8 章第 2 节中的讨论.

准. Leibniz 比 Descartes 更进一步, 用"代数的"和"超越的"字样来替代 Descartes 的词"几何的"和"机械的", 他对曲线必须有代数方程这一要求提出抗议[7]. 实际上 Descartes 和他的同时代人都忽略了这个要求而以同样的热情去研究旋轮线、对数曲线、对数螺线($\log\rho=a\theta$)和其他非代数曲线.

在推广容许曲线的概念方面, Descartes 迈出了一大步. 他不但接纳以前被排斥的曲线, 而且开辟了整个的曲线领域. 因为给定任何一个含 x 和 y 的代数方程, 人们可以求出它的曲线, 从而得到一些全新的曲线. 在«普遍的算术» (*Arithmetica Universalis*) 一书中, Newton 说(1707), "但是近代人走得更远[比起希腊人的平面、立体和线性的轨迹来], 把所有可以用方程表示的线都接收到几何里."

Descartes 下一步考虑几何曲线的分类. 含 x 和 y 的一次和二次曲线, 属于第一类, 即最简单的类. 关于这一点, Descartes 说, 圆锥曲线的方程是二次的, 但他没有证明. 三次和四次方程的曲线, 构成第二类. 五次和六次方程的曲线构成第三类, 余类推. 他把三次和四次的曲线归为一类, 五次和六次的归为一类, 是因为他相信, 在每一类中, 高次的那一个可以化为低次的, 正如四次方程的解可以通过三次方程的解来求出. 当然, 他这个信念是不对的.

«几何»的第三卷, 又回到第一卷的课题. 它的目的是要解决这样的几何作图问题: 当用代数语言叙述时, 它们引到三次和高次的方程, 而且依照代数, 它们需要圆锥曲线和高次曲线. 例如, Descartes 考虑了求两个已知量 a 和 q 的两个比例中项这一作图问题. 对于 $q=2a$ 的特殊情形, 古希腊人曾经尝试过许多次, 这一情形的重要处, 在于它是解决"双倍立方"问题的一种方式. Descartes 对此问题是这样进行的: 设 z 是一个比例中项, 则另一

(7) *Acta Erud.*, 1684, pp. 470, 587; 1686, p.292 = *Math. Schriften*, 5, 127, 223, 226.

个必定是 z^3/a，因为

$$\frac{a}{z}=\frac{z}{z^2/a}=\frac{z^2/a}{z^3/a^2}.$$

因此，如果取 z^3/a^2 为 q，就得到 z 必须满足的方程．由此可见，给定 q 和 a 之后，我们必须求 z 使

(3)
$$z^3=a^2q.$$

这就是说，必须解一个三次方程．这时，Descartes 就证明，z 和 z^2/a 可以借助一条抛物线和一个圆，用几何作图法求出．

从 Descartes 所描写的这个作图法上看，似乎没有牵涉到坐标几何．但是，抛物线是不能用直尺和圆规画出的(除非逐点去画)，所以必须按方程把它准确地描出．

Descartes 得到 z，并不是由于联立地解抛物线和圆的方程而求出它们的交点 (x, y)．换句话说，他并不是在我们现在的意义下来图解方程．他所用的是纯粹的几何作图法(但假定抛物线是可画的)和 z 满足方程(3)的事实，以及圆和抛物线的几何性质(这些性质可以更容易地从这两个曲线的方程看出)．Descartes 在这里做的和他在第一卷里做的完全一样，只不过在这里解决的几何作图问题中，其未知长度所满足的方程是三次或高次的，而不是一次或二次的．他所给出的关于问题的纯代数方面的解，以及随之而来的作图法，实际上和阿拉伯人所给出的一样，只不过他能够利用圆锥截线的方程来推导关于曲线的事实并且把它画出．

Descartes 不但立意说明某些立体问题怎样可以在代数和圆锥曲线的帮助下得到解决，而且注意于问题的分类，使人从中知道问题牵涉到什么以及怎样进行解决．他的分类法根据于作图问题所引出的代数方程的次．如果方程是一次的或二次的，就可用直线和圆把图作出．如果方程是三次或四次的，那就非用圆锥曲线不可．他无意中断言：所有三次的问题都可化为三等分角和双倍立方的问题，而且不用比圆更为复杂的曲线，三次问题是不能解决

的. 如果方程的次高于四，作图时就需要用比圆锥曲线更为复杂的曲线.

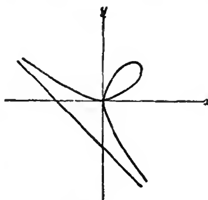


图 15.4

Descartes 又强调曲线方程的次是衡量曲线繁简的标准. 作图时应该用最简单的曲线(即最低次的方程). 他把曲线的次强调到这个程度，以至认为象 Descartes 叶线 $x^3+y^3-3axy=0$ (图 15.4)这样复杂的曲线，比曲线 $y=x^4$ 还要简单.

Descartes 把代数提高到重要地位，其意义远远超过他对作图问题的洞察和分类. 这个关键思想使人们能够认识典型的几何问题并且能够把在几何形式上互不相关的问题归在一起. 代数给几何带来最自然的分类原则和最自然的方法层次. 不仅可解性问题和作图可能性问题，能够从平行于几何的代数来漂亮地迅速地完全地决定，而且离开代数，决定就成为不可能的了. 因此，体系和结构就从几何转移到代数.

在«几何»第二卷的一部分和«折光»里，Descartes 用坐标几何作为助力，从事于光学的研究. 他对望远镜、显微镜以及其他光学仪器中透镜的设计非常关心，因为他体会到这些仪器对于天文学和生物学是重要的. 他在«折光»里讨论了折射现象. 在他之前，Kepler 和 Alhazen 已经注意到下述说法对大的角度是不正确的：折射角和入射角成比例，其比例常数依赖于引起折射的介质. 但他两人没有发现正确的定律. Snell 在 1626 年之前发现了(但未发表)正确的定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2},$$

其中 v_1 是光在第一介质中的速度，v_2 是光进入第二介质后的速度(图 15.5). Descartes 于 1637 年在他的«折光»里给出同样的定

律,他是不是独立地发现了这个定律,至今还没有考查清楚.关于这个定律,他所给出的证明是错误的. Fermat 立即对定律及其证明进行攻击.这就引起了他两人之间长达十年之久的争论. Fermat 一直到他从他的"最短时间原理"(第24章第3节)导出此定律后,才承认它是正确的.

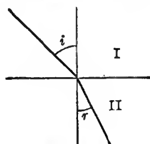


图 15.5

Descartes 在«折光»里描述了眼的动作之后,进而考虑怎样去恰当地设计望远镜、显微镜和眼镜的聚焦透镜.早在古代就知道球形透镜不能使平行光线或从光源 S 发出的光线聚焦于一点,因此什么形状的透镜能起这样的聚焦作用,还是一个没有解决的问题. Kepler 建议用某种圆锥截线, Descartes 试图设计一个能完全聚焦的透镜.

他成功地解决了这个一般性问题:什么样的曲面作为两种介质的交界面时,能使从第一种介质内一点发出的光线射到曲面上,折入第二种介质而聚于一点.他发现:具有这个性质的旋转面是由一个卵形线(叫做 Descartes 卵形线)产生的.他在«折光»里讨论这个曲线和它的折光性质,并且在«几何»的第二卷里作了补充.

这条曲线的近代定义是满足条件

$$FM \pm nF'M = 2a$$

的点 M 的轨迹,其中 F 和 F' 是固定点, $2a$ 是大于 FF' 的任意实数, n 是任意实数.如果 $n=1$,曲线就成了椭圆.在一般情形下,卵形线的方程对 x 和 y 是四次的,这个曲线包括两个没有共同点的闭线,而且一个在另一个之内.在内的那个,类似于椭圆,在外的那个可能是凸的,也可能有拐点,如图 15.6 所示.

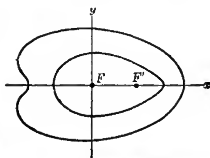


图 15.6

我们现在能够看到, Descartes 和 Fermat 研究坐标几何的

方法大不相同. Descartes 批评了希腊的传统，而且主张同这传统决裂; Fermat 则着眼于继承希腊人的思想，认为他自己的工作只是重新表述了 Apollonius 的工作. 真正的发现——代数方法的威力——是属于 Descartes 的; 他知道他是在改换古代方法. 虽然用方程表示曲线的思想在 Fermat 的工作中比在 Descartes 的工作中更为明显，但 Fermat 的工作主要是这样一个技术的成就: 它完成了 Apollonius 的工作，并且利用了 Vieta 用字母代表数类的思想. Descartes 的方法是可以普遍使用的，而且就潜力而论也适用于超越曲线.

尽管 Descartes 和 Fermat 研究坐标几何的方式和目的有显著的不同，他们却卷入谁先发现的争论. Fermat 的著作直到 1679 年才出版，但他在 1629 年已发现了坐标几何的基本原理，这比 Descartes 发表《几何》的年代 1637 年还早. Descartes 当时已完全知道 Fermat 的许多发现，但否认他的思想是从 Fermat 来的. 荷兰数学家 Isaac Beeckman(1588～1637) 把 Descartes 的坐标几何思想回溯到 1619 年，而且坐标几何中的许多基本思想，无疑是 Descartes 首创的.

当《几何》出版的时候，Fermat 批评说，书中删去了极大值和极小值，曲线的切线，以及立体轨迹的作图法. 他认为这些是值得所有几何学家注意的. Descartes 回答说，Fermat 几乎没有做什么，至多做出一些不费气力不需要预备知识就能得到的东西，而他自己却在《几何》的第三卷中，用了关于方程性质的全部知识. 他讽刺地称呼 Fermat 为我们的极大和极小大臣，并且说 Fermat 欠了他的债. Roberval, Pascal 和其他一些人站在 Fermat 一边，而 Mydorge 和 Desargues 站在 Descartes 一边. Fermat 的朋友们给 Descartes 写了尖刻的信. 后来这两人的态度趋于缓和. 在 1660 年的一篇文章里，Fermat 虽然指出《几何》中的一个错误，但他宣称他是如此佩服 Descartes 的天才，即使 Descartes 有误，

他的工作甚至比别人没有错误的工作更有价值. Descartes 却不象 Fermat 那样宽厚.

后代人对待《几何》并不象 Descartes 那样重视. 虽然对数学的前途来说, 方程和曲线的结合是一个显著的思想, 但对 Descartes 来说, 这个思想只是为了达到目的——解决作图问题——的一个手段.

Fermat 强调轨迹的方程, 从近代观点来看, 是更为恰当的. Descartes 在卷一和卷三中所着重的几何作图问题, 已渐失去重要性, 这主要是因为不再象希腊人那样, 用作图来证明存在了.

第三卷中也有一部分是在数学里占永久地位的. Descartes 解决几何作图问题时, 首先把问题用代数表出, 接着就解出所得到的代数方程, 最后按解的要求来作图. 在这个过程中, Descartes 收集了自己的和别人的有助于求解的方程论工作. 因为代数方程不断地出现在成百的、与作图问题无关的不同场合中, 所以这个方程论已经成为初等代数的基础部分.

5. 坐标几何在十七世纪中的扩展

有种种原因, 使坐标几何的主要思想——用代数方程表示并研究曲线——没有被数学家热情地接受并利用. Fermat 的《轨迹引论》虽然在他的朋友中得到传播, 但迟至1679年才出版. Descartes 对于几何作图问题的强调, 遮蔽了方程和曲线的主要思想. 事实上, 许多和他同时代的人认为坐标几何主要是解决作图问题的工具, 甚至 Leibniz 也说 Descartes 的工作是退回到古代. Descartes 本人确实知道他的贡献远远不限于提供一个解决作图问题的新方法. 他在《几何》的引言中说: "此外, 我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论, 以及考查这些性质的方法, 据我看, 远远超出了普通几何的论述, 正如 Cicero 的词令远远超过儿童的简

单语言一样.”但是,他利用曲线方程之处,例如,解决 Pappus 问题,求曲线的法线,找出卵形线的性质等,大大地被他的作图问题所遮盖.坐标几何传播速度缓慢的另一原因,是 Descartes 坚持要把他的书写得使人难懂.

还有一个原因,是许多数学家反对把代数和几何混淆起来,或者把算术和几何混淆起来.早在十六世纪当代数正在兴起的时候,已经有过这种反对的意见了.例如,Tartaglia 坚持要区别数的运算和希腊人对于几何物体的运算.他谴责《几何原本》的译者不加区别地使用 *multiplicare*(乘)和 *ducere*(倍)两字.他说,前一字是属于数的,后一字是属于几何量的. Vieta 也认为数的科学和几何量的科学是平行的,但是有区别.甚至 Newton 也如此,他虽然对坐标几何有贡献,而且在微积分里使用了它,但反对把代数和几何混淆起来,他在《普遍的算术》中说[8]:

> 方程是算术计算的表达式,它在几何里,除了表示真正几何量(线,面,立体,比例)间的相等关系以外,是没有地位的.近来把乘、除和同类的计算法引入几何,是轻率的而且是违反这一科学的基本原则的…….因此这两门科学不容混淆,近代人混淆了它们,就失去了简单性,而这个简单性正是几何的一切优点所在.

对于 Newton 的立场的一个合理解释是:他想把代数排斥到初等几何之外,但他也确实知道,代数在处理圆锥截线和高次曲线时是有用的.

使坐标几何迟迟才被接受的又一原因,是代数被认为缺乏严密性.我们已经谈到(第 13 章第 2 节),Barrow 不愿承认:无理数除了作为表示连续几何量的一个符号外,还有别的意义.算术和代数从几何得到逻辑的核实,因而代数不能替代几何,或与几何

(8) *Artthmetica Universalis*, 1707, p. 282.

并列. 哲学家 Thomas Hobbes(1588～1679)虽然在数学里是个小人物,但当他反对"把代数应用到几何的一整批人"时,却代表许多数学家发了言,说这批数学家错误地把符号当做几何. 他又认为 John Wallis 论圆锥曲线的书是卑鄙的,是"符号的结痂".

上述种种,虽然阻碍了对 Descartes 和 Fermat 的贡献的了解,但也有很多人逐渐采用并且扩展了坐标几何. 第一个任务是解释 Descartes 的思想. Frans van Schooten(1615～1660)将《几何》译成拉丁文,于 1649 年出版,并再版了若干次,这本书不但在文字上便于所有的学者(因为他们都能读拉丁文),而且添了一篇评论,对 Descartes 的紧致陈述加以阐发. 在 1659～1661 年的版本中, van Schooten 居然给出坐标变换——从一条基线(x 轴)到另一条基线——的代数式. 他如此深切地感到 Descartes 方法的力量,以至宣称希腊人就是用这个方法导出他们的结果的. 照 van Schooten 的说法,希腊人是先由代数工作看出怎样去综合地得出结果——van Schooten 说明如何做到这一步——然后发表那些没有代数方法显明的综合方法来惊世骇俗. van Schooten 可能误解了"分析"(这个词按希腊人的意思是分析某个问题)和"解析几何"(这个词特别描写 Descartes 把代数当作方法使用)的意义.

John Wallis 在《论圆锥曲线》(*De Sectionibus Conicis*, 1655)中,第一次得到圆锥曲线的方程. 他是为了阐明 Apollonius 的结果,把 Apollonius 的几何条件翻译成代数条件(就象我们在第 4 章第 12 节所做的),从而得到这些方程的. 他于是把圆锥曲线定义为对应于含 x 和 y 的二次方程的曲线,并证明这些曲线确实就是几何里的圆锥曲线. 他很可能是第一个用方程来推导圆锥截线的性质的人. 他的书大大有助于传播坐标几何的思想,又有助于普及这样的处理法:把圆锥截线看作平面曲线,而不看作是圆锥与平面的交线,虽然这后一种看法仍继续流传着. 此外, Wallis 强调代数推理是有效的,而 Descartes 至少在他的《几何》中实际上

依靠几何，认为代数只是一种工具. Wallis 又是第一个有意识地引进负的纵横坐标的人. 略晚一些, Newton 也这样做,可能是从 Wallis 那里学来的. 我们可以比较 van Schooten 和 Wallis 的说法, Wallis 说, Archimedes 和几乎所有的古代人把他们的探索和分析问题的方法对后辈如此保密，使近代人觉得发明一种新的分析法比寻找旧的还要容易些.

Newton 的«流数法与无穷级数»(*The Method of Fluxions and Infinite Series*)，大约于 1671 年写成，但第一次出版的，却是 John Colson(死于 1760 年)的英译本，出版于 1736 年. 此书包括坐标几何的许多应用, 例如按方程描出曲线. 书中创见之一，是引进新的坐标系. 十七,甚至十八世纪的人,一般只用一根坐标轴(x 轴),其 y 值是沿着与 x 轴成直角或斜角的方向画出的. Newton 所引进的坐标系之一，是用一个固定点和通过此点的一条直线作标准，略如我们现在的极坐标系. 书中还包括其他与极坐标有关的思想. Newton 又引进了双极坐标,其中每点的位置决定于它至两个固定点的距离(图 15.7). 由于 Newton 的这个工作直到 1736 年才为世所知,而 James(Jakob) Bernoulli 于 1691 年在«教师学报»(*Acta Eruditorum*)上发表了一篇基本上是关于极坐标的文章,所以通常认为 James Bernoulli 是极坐标的发现者.

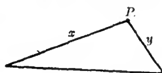


图 15.7

后来又出现了许多新的曲线和它们的方程. 1694 年，Bernoulli 引进了双纽线[9]，这个线在十八世纪起了相当大的作用. 这条曲线是一大族叫做 Cassini 卵形线的一个特例. 这族曲线是 Jean-Dominique Cassini (1625～1712) 引进的，但迟至 1749 年才由他的儿子 Jacques (1677～1756) 发表在«天文学初步» (*Eléments d'astronomie*)里. Cassini 卵形线(图 15.8)的定义是：线上的任何点到两

(9) *Acta Erud.*, Sept. 1694=*Opera*, 2, 608～612.

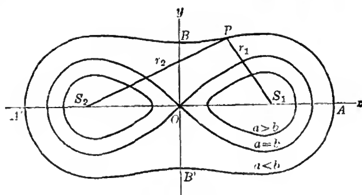


图 15.8

个固定点 S_1, S_2 的距离 r_1, r_2 的乘积等于常数 b^2, b 是正常数. 设 S_1 与 S_2 间的距离是 $2a$, 如果 $b>a$, 就得到一个没有自交点的卵形线. 如果 $b=a$, 就得到 James Bernoulli 所引进的双纽线. 如果 $b<a$, 卵形线就分为两个. Cassini 卵形线的直角坐标方程是四次的. Descartes 自己引进了对数螺线(10), 它的极坐标方程是 $\rho=a^{\theta}$, 并且发现了它的许多性质. 还有其他曲线, 包括悬链线和旋轮线, 将在别处谈到.

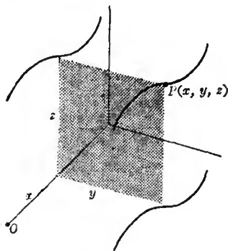


图 15.9

把坐标几何推广到三维空间, 是在十七世纪中叶开始的. 在《几何》的第二卷中, Descartes 指出, 容易使他的想法运用到所有这样的曲线, 即可以看作是一个点在三维空间中作规则运动时所产生的曲线. 要把这种曲线用代数表示出来, Descartes 的计划是: 从曲线的每个点处作线段垂直于两个互相垂直的平面(图 15.9). 这些线段的端点将分别在这两个平面上描出两条曲线, 而这两条平面曲线就可用已知的方法处理. 在第二卷的靠前一部分里, Descartes 指出, 一个含有三个

(10) 1638 年 9 月 12 日给 Mersenne 的信 = *Œuvres*, 2, 360.

未知数——这三个数定出轨迹上的一点 C——的方程所代表的 C 的轨迹是一个平面，一个球面，或一个更复杂的曲面．他显然体会到他的方法可能推广到三维空间中的曲线和曲面，可是他没有进一步去考虑这种推广．

Fermat 在 1643 年的一封信里，简短地描述了他的关于三维解析几何的思想．他谈到柱面，椭圆抛物面，双叶双曲面和椭球面．然后他说，作为平面曲线论的顶峰，应该研究曲面上的曲线．"这个理论，有可能用一个普遍的方法来处理，我有空闲时将说明这个方法．"在一篇只有半页长的文章（*Novus Secundarum*）[11] 里，他说，含有三个未知数的方程表示一个曲面．

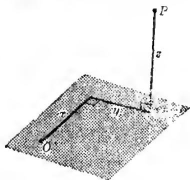


图 15.10

La Hire 在他的《圆锥截线新论》（*Nouveaux élémens des sections coniques*, 1679）里，对三维坐标几何作了较为特殊的讨论．为了表示曲面，他先用三个坐标表示空间中的点 P（图 15.10），然后实际写出了曲面的方程．尽管如此，三维坐标几何的发展，是十八世纪里的事，我们以后将讨论到．

6. 坐标几何的重要性

在 Fermat 和 Descartes 走上数学舞台之前，代数已有相当大的进展，鉴于这个事实，坐标几何不是一个巨大的技术成就．对 Fermat 来说，它是 Apollonius 工作的代数翻版．对于 Descartes 来说，它几乎是一个偶然的发现，这个发现，是他继续 Vieta 和其他人的工作，利用代数来解决确定的几何作图问题时得到的．然而坐标几何却改变了数学的面貌．

---

(11) *Œuvres*, 1, 186～187; 3, 161～162.

Descartes 辩论说，曲线是任何具有代数方程的轨迹. 他这话一下子就扩大了数学的领域. 我们只要考虑到在数学中已经被承认被使用的曲线种类，并且把这些种类同希腊人所承认的曲线种类相比较，就知道冲破希腊人的堤防是如何重要的了.

Descartes 企图通过坐标几何来给几何引进新方法. 他的成就远远超过他的期望. 在代数的帮助下，不但能够迅速地证明关于曲线的任何事实，而且这个探索问题的方式，几乎成为自动的. 这些认识，在今天已经是平淡无奇的事了. 这套研究方法甚至是更为有力的. 当 Wallis 和 Newton 开始用字母代表正数、负数甚至以后代表复数时，就有了可能把综合几何中必须分别处理的情形，用代数来统一处理. 例如，在综合几何中证明三角形的高交于一点时，必须分别考虑交点是在三角形内和三角形外，而用坐标几何来证，则不加区别.

坐标几何把数学造成一个双面的工具. 几何概念可用代数表示，几何的目标，可通过代数达到. 反过来，给代数语言以几何的解释，可以直观地掌握那些语言的意义，又可以得到启发去提出新的结论. Lagrange 曾把这些优点写进他的«数学概要» (*Leçons élémentaires sur les mathématiques*)(12)中："只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄. 但是当这两门科学结合成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善."的确，十七世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于坐标几何.

坐标几何的显著优点，在于它恰好提供了科学久已迫切需要的，而且在十七世纪一直公开要求着的数学设备. 这设备就是数量的工具. 研究物理世界，似乎首先需要几何. 物体基本上是几何的形象，运动物体的路线是曲线. Descartes 自己确也认为全部物理都可归结到几何. 但是，我们已经指出，把科学应用到短程测

(12) *Œuvres*, 7, 183~287, p. 271 in part.

地学,航海学,日历计算,天文预测,抛射体的运动,以及 Descartes 曾经搞过的透镜设计时,都需要数量知识. 坐标几何使人能把形象和路线表为代数的形式,从而导出数量知识.

因此,代数变得比几何更为重要,虽然 Descartes 认为它只是一种工具,又认为与其说它是数学的一部分,还不如说它是逻辑的一个推广. 事实上,坐标几何为倒换代数和几何的作用铺平了道路. 从希腊时代到 1600 年,几何统治着数学,代数居于附庸的地位. 1600 年以后,代数成为基本的数学部门. 在这作用的交替中,微积分将是决定的因素. 不过,代数的升级,加重了我们已经指出过的困难,即算术和代数没有逻辑基础,这个困难直到十九世纪晚期,还没有解决的办法.

代数建立在经验的基础上这一事实,引起了数学名词的混乱. Fermat 和 Descartes 所创立的科目,通常叫做"解析几何". "解析"一词用在这里是不恰当的,叫坐标几何或代数几何较好(代数几何现在有另外的意义). 自 Plato 以后,"解析"一词指的是这样的过程: 从所要证明的结论开始,往回做去,直至达到一些已知的东西为止. "解析"在这个意义下与"综合"相反,后者系指演绎的表述而言. 约在 1590 年, Vieta 认为 algebra(代数)一字在欧洲语言中没有意义,屏去不用,而建议用 analysis(解析)字样(第 13 章第 8 节),他的建议没有被采用. 但对 Vieta 和 Descartes 来说,用"解析"一词来描写把代数应用到几何上还是恰当的,因为他们是用代数来分析几何作图问题的. 他们假定要求的几何长度已经知道,找出这长度所满足的方程,并调整这方程,使得从中能看出怎样去画出所求的长度. 因此 Jacques Ozanam(1640~1717) 在他的《字典》(*Dictionary*, 1690)中说,近代人用代数来进行分析. 在十八世纪著名的《百科全书》(*Encyclopédie*)中, d'Alembert 把"代数"和"解析"当作同义词用. "解析"一词逐渐地变为专指代数方法而言,而新的坐标几何,大约直到十八世纪末,在形式上几乎

一律被描写成代数在几何上的应用. 但是, 到了十八世纪末年, "解析几何"已经成为标准的名词, 常常用作书的名字.

在代数变成一个突出的科目时, 数学家就认为它的作用远远大于希腊人所理解的"对问题作分析". 在十八世纪中, 这样的看法——应用到几何上的代数, 不象 Descartes 所说的只是一种工具, 而是象 Fermat 所说的, 它本身就是一个引进并研究曲线和曲面的基本方法——通过 Euler, Lagrange 和 Monge 的工作而得到胜利. 据此, "解析几何"一词含有证明和使用代数方法的意思, 因而我们现在把解析几何和综合几何相提并论, 不再认为一个是发明的手段, 而另一个是证明的方法了. 两者都是演绎的.

与此同时, 微积分和无穷级数进入了数学. Newton 和 Leibniz 都认为微积分是代数的扩展; 它是"无穷"的代数, 或者是具有无穷多个项的代数, 例如无穷级数. 就在 1797 年这样近的年代里, Lagrange 在他的《解析函数论》(*Theórie des fonctions analytiques*) 中说, 微积分及其以后的发展只是初等代数的一个推广. 因为代数和解析是同义词, 所以微积分也叫做解析. Euler 于 1748 年在一本著名的微积分教科书中, 用"无穷小量解析"一词来描写微积分. 这个名字直到十九世纪晚期还在使用; 当时解析一词是用来描写微积分和建筑在微积分上的那些分支的. 这样就给我们遗留下来一个混乱的情况: "analysis"包括所有建立在极限过程上的数学, 而"analytic geometry"则与极限过程无关.

参考书目

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1900, Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 2, pp. 806~876.

Chasles, Michel: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 3rd ed., Gauthier-Villars et Fils, 1889, Chaps. 2~3 and relevant notes.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 117~131.

Descartes, René: *La Géométrie* (French and English), Dover (reprint), 1954.

Descartes, René: *Œuvres*, 12 vols., Cerf, 1897~1913.

Fermat, Pierre de: *Œuvres*, 4 vols. and Supplement, Gauthier-Villars, 1891~1912; Supplement, 1922.

Montucla, J F.: *Histoire des mathématiques*, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 2, pp. 102~177.

Scott, J. F.: *The Scientific Work of René Descartes*, Taylor and Francis, 1952.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 389~402.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics*, 1200~1800, Harvard University Press, 1969, pp. 87~93, 143~157.

Wallis, John: *Opera*, 3 vols., (1693~1699), Georg Olms (reprint), 1968.

Vrooman, Jack R.: *René Descartes: A Biography*, G. P. Putnam's Sons, 1970.

Vuillemin, Jules: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France,1960.

16

科学的数学化

我们可以说，现在是第一次把一个拥有许多奇妙结果的新方法公开出来；在未来的年月里，它将赢得别人的重视。
Galileo Galilei

1. 引　言

截至1600年，欧洲的科学家无疑地注意到数学在自然科学研究上的重要性．这种信念的最有力的证据是Copernicus和Kepler的工作，他们为了一个在当时仅仅具有数学优越性的理论而坚决地去推翻久已公认的天文学和力学的定律以及宗教信条．尽管如此，倘若科学仍然跟着以往的脚步前进，就很可能不会有近代科学的惊人成就，数学也就不会从中取得推动创造性工作的巨大力量．可巧在十七世纪中，Descartes和Galileo两人针对科学活动的基本性质，进行了革命化．他们选定科学应该使用的概念，重新规定科学活动的目标，改变科学中的方法论．他们这样做，不仅使科学得到出乎意料和史无前例的力量，而且把科学和数学紧紧地结合起来．他们这个计划，实际上是要把理论科学归结到数学．想要了解从十七世纪到十九世纪这段时间中推动数学的力量，我们必须先考察Descartes和Galileo两人的思想．

2. Descartes的科学观

Descartes明确宣称，科学的本质是数学．他说，他“既不承认

也不希望物理学中有任何原理不同于几何学和抽象数学中的原理，因为后者能解释一切自然现象，并且能对其中一些现象给出证明.”客观世界是固体化了的空间，或者说是几何的化身．因此它的性质应该可以从几何的基本原理推导出来.

Descartes 精心讨论了为什么世界是可以接近的，并可以归结到数学的．他坚持：物质的最基本和最可靠的性质是形状、延展和在时空里的运动．因为形状也只是延展，所以他断言：“给我延展和运动，我将把宇宙构造出来.”运动本身是由于力作用在分子上的结果．Descartes 相信这些力服从于不变的数学定律；而且由于延展和运动都可用数学表出，所以一切现象都可用数学描写出来.

Descartes 的机械哲学甚至推广到人体的机能上去．他相信，力学定律可以解释人和其他动物的生命．在他的生理学著作中，他用热，水力，管子，活塞和杠杆的机械作用去解释身体的作用；只有上帝和灵魂不是机械的.

如果 Descartes 把周围的一切看作只是由运动的物质构成的，那末，他怎样解释味道，气味，颜色和声音的质量呢？这里他采用了古希腊关于第一性和第二性的学说，依照 Democritus，这个学说主张“甜与苦，冷与热，以及颜色等东西，只在意念中存在，在实际中不存在，真正存在的是不变的粒子，原子以及它们在空的空间中的运动.”第一性的东西，即物质与运动，存在于物理世界中；第二性的东西，仅仅是当外界原子冲击到人的感官时，第一性的东西产生这些感官上的效果.

因此，在 Descartes 看来，有两个世界：一个是巨大的协调地设计出来的数学机器，存在于空间和时间中，另一个是思维的世界．第一世界中的元素作用在第二世界上的效果就产生出物质的非数学性质或次要的性质．此外，Descartes 肯定了自然界定律的不变性，因为这些定律只是预先规定的数学图案的一部分，就是上

帝，也不能改动这不变的自然界．在这里，Descartes 否认了通行的信条：上帝不断地干预着宇宙的活动．

虽然 Descartes 的哲学和科学学说，背离了 Aristotle 主义和经院主义，但在一个基本的方面，他还是一个经院主义者：他从自己的心里得出关于存在和实在的命题．他相信有先天的真理，而且理智本身的力量，可以得到对于一切事物的完全知识；例如，他是在先天推理的基础上，叙述出运动定律的（实际上，在他的生物学工作中，他做了些实验，并且从中得出重要的结论）．但是除了依靠先天原理以外，他的确传播了一个普遍的系统的哲学，从而震撼了经院主义的堡垒，开辟了新鲜的思想渠道．他的关于清除一切先入之见和偏见的企图，是他对过去造反的明白的宣告．通过把自然现象归结为纯物理的事态，他的确作了许多努力去剥掉科学中的神秘主义和玄虚成分．Descartes 的著作影响很大，他的演绎而且系统的哲学，风行于十七世纪，特别是使 Newton 注意到运动的重要性．他的哲学著作的精装本，甚至成为贵妇们梳妆台上的点缀品．

3. Galileo 的科学研究方式

虽然 Galileo 的科学哲学大部分与 Descartes 的一致，但是给近代科学制定出更彻底更有效更具体的程序，并用自己的工作证实该程序的效果的，却是 Galileo.

Galileo(1564～1642) 出生于比萨(Pisa)一个布商的家庭，他进了比萨大学学医．那里的课程还是在中世纪的水平上．Galileo 从一位工程师那里学了数学，在 17 岁那年他从医学转到数学．学了大约八年之后，他向波隆那(Bologna)大学申请一个教师职位，但因他不够优秀而遭到拒绝．后来他到底得到比萨大学的一个数学教授职位．在那里，他开始攻击 Aristotle 派的科学，并且毫不

迟疑地发表他的看法. 即使因为他的批评,使同事们疏远了他,也在所不顾. 那时他已经开始写出重要的数学论文,从而引起一些能力较差的人的忌妒. 这使他感到不愉快,因而在 1592 年接受了帕度亚(Padua)大学数学教授的职位. 在那里,他写了一本小册子《力学》(*Le mecaniche*, 1604). 在帕度亚呆了 18 年后,他被迈地奇(Medici)的大公爵 Cosimo II 邀请到佛罗伦斯(Florence),并被任命为宫廷首席数学家. Cosimo 给了他一所住房和可观的薪俸,并且保护他免于受耶稣会的迫害(那时耶稣会把持着教皇职位,而 Galileo 由于拥护 Copernicus 的学说已经受到它的威胁). 为了表达他的谢意, Galileo 把他所发现的木星的卫星命名为迈地奇卫星,这些星是在他为 Cosimo 服务的第一年中发现的. 他在佛罗伦斯有充分时间从事研究和写作.

他提倡 Copernicus 学说,触怒了罗马宗教法庭, 1616 年他被召到罗马. 他对于太阳中心论的传播,受到了谴责. 他不得不答应不再发表关于这个专题的东西. 1630 年教皇 Urban 八世确实允许他发表,只要他的书是数学的而不是教义的. 因此,在 1632 年,他出版了他的经典著作《关于两大世界体系的对话》(*Dialogo dei massimi systemi*)*). 1633 年罗马教皇法庭再次传唤他去. 在刑具威胁下,强迫他放弃对于太阳中心论的拥护. 他再度被禁止发表东西,而且被迫度着实际上是软禁的生活. 但他仍然从事于写出他多年来关于运动现象和材料力学的思想与工作. 他的著作《关于两门新科学的探讨和数学证明》(*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze*),又叫《关于两门新科学的对话》,被秘密地运到荷兰,于 1638 年在那里出版. 这是一部经典著作,在书中 Galileo 提出了他的新的科学方法. 他用以下的话为他的行为辩护:"我对教会和对我自己的良心的虔诚和崇敬从来没

*) 此书有中译本,书名是《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》,上海外国自然科学哲学著作编辑组译(据加里福尼亚大学 1953 年英译本译出). ——译者注

有衰减过."

Galileo 在许多科学领域里是一个杰出的人物. 他是敏锐的天文观察者. 他常被称为近代发明之父; 虽然他没有发明望远镜(当时诗人 Ben Jonson 称之为迷惑镜), 但他一听说这种想法, 他就能立刻造出一个来. 他是显微镜的一个独立发明者, 并且设计了第一个摆钟. 他又设计并制成一个罗盘, 其标尺自动地给出数值的结果, 使用者能在标尺上读出, 避免了计算之烦. 这种罗盘销路很广, 他做了许多个出售.

Galileo 是第一个重要的近代声学的研究者. 他提出一个声波理论, 并且开始进行关于音调, 谐音和弦振动的研究工作. 这工作被 Mersenne 和 Newton 继承, 成为十八世纪中数学工作的主要激发力.

Galileo 的主要著作, 虽然讨论的是科学课题, 但至今仍被认为是文学杰作. 在他 1610 年写的«恒星的使者» (*Sidereus Nuncius*) 一书里, 他宣布了他的天文观测, 并宣称他是 Copernicus 理论的支持者. 这书立刻给他带来胜利, 他被选为著名的罗马"山猫学院"(Academy of the Lynx-like) 的成员. 他的两部经典著作«关于两大世界体系的对话»和«关于两门新科学的对话»写得清楚, 直接, 机智而又深奥. 在这两本书中, Galileo 让一个角色提出流行的观点, 让另一个角色对他作巧妙而坚定的辩论, 指出这些观点的错误和弱点以及新观点的力量.

在他的科学哲学中, Galileo 对于自然界, 坚决地同臆测的、神秘的看法决裂而赞成力学的和数学的观点. 他还相信, 科学问题不应该为神学的辩论所迷惑、所蒙蔽. 事实上, 他的科学成就之一(虽然多少离开了我们将要考察的方法), 就是他明确地认识了科学领域而决然地把它同宗教教条割断.

Galileo 和 Descartes 一样, 相信自然界是用数学设计的. 他的 1610 年的叙述是著名的:

> 哲学[自然]是写在那本永远在我们眼前的伟大书本里的——我指的是宇宙——但是，我们如果不先学会书里所用的语言，掌握书里的符号，就不能了解它．这书是用数学语言写出的，符号是三角形，圆形和别的几何图象．没有它们的帮助，是连一个字也不会认识的；没有它们，人就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着．[1]

自然界是简单而有秩序的，它的行动是规则的而且必要的．它按照完美而不变的数学规律活动着．神圣的理智，是自然界中理性事物的源泉．上帝把严密的数学必要性放入世界，人只有通过艰苦努力才能领会这个必要性．因此，数学知识不但是绝对真理，而且象圣经那样，每句每行都是神圣不可侵犯的．实际上，数学更优越，因为对圣经有许多不同的意见，而对数学的真理，则不会有不同的意见．

另一信条，希腊人 Democritus 的原子论，在 Galileo 的著作中，比在 Descartes 的著作中更为明显．原子论预先假定有空的空间(Descartes 不承认这一点)和单个的不可毁灭的原子．变化是由原子的组合和分解构成的．物体中所有质的差别，都是由原子在数量、大小、形状和位置排列上的差别造成的．原子的主要性质是不可透入性和不可毁灭性．这些性质可用来解释化学现象与物理现象．Galileo 拥护原子论，把它摆在科学学说的前线．

原子论把 Galileo 吸引到第一性和第二性的学说．他说："如果把耳朵，舌头和鼻子都去掉，我的意见是：形状，数量[大小]，和运动将仍存在，但将失掉嗅觉，味觉和声觉，这些是从活的动物抽象出来的，照我看来，只是一些名词而已．"因此，Galileo 和 Descartes 一样，一下子就剥掉了千百种现象和性质而集中到物质和运动这两种可用数学描述的东西．在一个把运动问题作为最突

(1) *Opere*, 4, 171.

出最严肃的问题的世纪里，科学家认为运动是一个基本的物理现象，也许是不足为怪的.

集中到物质和运动，只是 Galileo 研究自然的新方式的第一步．他的下一步思想，Descartes 也曾提到过的，就是任何科学分支应在数学模型上取图案．这包括两个主要步骤．数学从公理——清楚而自明的真理——出发，通过演绎推论而建立新的真理．据此，任何科学分支，都应从公理或原理出发，然后演绎地进行下去．不但如此，还应从公理推出尽量多的结果．当然，这个思想，源于 Aristotle，他所寻求的也是在数学模型指引下的演绎结构.

可是，Galileo 根本上不同于希腊人，不同于中世纪的科学家甚至 Descartes 之处，在于他的寻求基本原理的方法．Galileo 以前的人和 Descartes 都相信基本原理出自心中，心只须对任何一类现象去想，它就能认出基本的真理．心的这种力量，在数学中明白地得到证实．象"等量加等量结果还相等"和"两个点确定一条直线"等公理，只要我们想到数和几何图形，就会立刻呈现出来，而且是无可争辩的真理．希腊人也曾这样找出一些自明的物理原理．例如"宇宙中所有物体都应有自然位置"这条原理是再恰当没有的了．静止状态看来显然比运动状态更为自然．必须用力来推动和保持物体的运动，这也似乎是无可争辩的．相信心能够提供基本原理，并不否认观测在获得这些原理的过程中可能起的作用，但是观测只是唤起正确的原理，正如看见一个熟识的面孔，就能想起有关那个人的事情一样.

希腊和中世纪的科学家，如此相信先天的基本原理，以至当观测偶然不符合时，他们就造出特殊的解释来保存原理，同时也说明异常的地方．这些人，照 Galileo 的说法，是首先决定世界应该如何作用着，然后把他们所看见的东西配合到他们预想的原理中去.

Galileo 决定：在物理学中，和在数学中相反，基本原理必须来

自经验与实验. 寻求正确而基本的原理的道路，是要注意什么是自然界说的，而不必注意什么是心之所愿的. 他辩论道，自然界不是先造出人脑，然后把世界安排得使它能被人的智慧所接受. 对于中世纪的思想家无休止地重复 Aristotle 的话并且争论它的含义，Galileo 给以批评说，知识来自观测，不来自书本，关于 Aristotle 的辩论是无用的. 他说:“当我们得到自然界的意志时，权威是没有意义的……”. 当然，有些文艺复兴时代的思想家以及 Galileo 的同时代人 Francis Bacon 也得出同样的结论：实验是必要的. 在他的新方法的这一特殊方面，Galileo 并没有走在别人前面. 但是，近代主义者 Descartes 却认为 Galileo 依赖于实验的办法是不明智的. Descartes 说，感官所及的事情只能引向幻觉，只有理性能透过幻觉. 从内心所提供的天生的一般原理，我们能推出自然界的特殊现象，并且理解它们. Galileo 确曾领会到：人可能从实验得出一个不正确的原理，因而从这原理得出的推论，也是不正确的. 因此，他建议用实验去考核推理的结果，并且去获得基本原理.

就实验而论，Galileo 确是一个过渡人物. 他，还有五十年后的 Newton，都相信少数关键性实验应该能产生正确的基本原理. 不仅如此，有许多 Galileo 叫做实验的，实际上是思想中的实验，这就是说，他依靠日常经验去想象如果真作实验的话，应该得到什么结果，于是他就坚信不疑地作出结论，好象他曾真正作过实验一样. 当他在《关于两大世界体系的对话》中描写到一个球从航行着的船的桅杆顶上掉下来的运动时，Simplicio(书中对话人之一)问他是否做过实验. Galileo 答道:“没有做过，我不需要做，即使没有任何经验，我也能肯定是这样的，因为它不能不是这样.”事实上，他说他很少做实验，做实验主要是为了驳斥那些不遵循数学的人. 虽然 Newton 做了一些著名而巧妙的实验，却也说，他做实验是为了使他的结果在物理上易于了解，并且使普通人相信.

这事的真实情况是：Galileo 对于自然有一些成见，这使他相信有少许实验就足够了．例如，他相信自然界是简单的，因此，当他考虑自由落体以递增的速度下降时，他断定速度的增加，在下降的每秒时间内是一样的，这是最简单的“真理”．他也相信自然界是用数学设计出来的，因此任何数学定律，即使只是在很有限的实验中似乎是对的，在他看来就是对的．

Galileo 和 Huygens, Newton 一样，认为科学工作中的演绎数学部分所起的作用比实验部分所起的作用要大．对 Galileo 说来，由一个单独的原理推出大量定理所引起的自豪感，不亚于该原理本身的发现所引起的自豪感．为近代科学造型的人——Descartes, Galileo, Huygens 和 Newton(还可加上 Copernicus 和 Kepler)——都是以数学家的身份去探索自然，无论在一般方法上或具体研究上都是这样．他们是悬拟式的思想家，期望通过直观或通过关键性的观察和实验去了解广泛的，深刻的(但是简单的)，清晰而且不变的数学原理，然后从这些基本原理导出新的定律，完全和数学本身构造它的几何的方式一样．大量的活动是演绎部分；整个的思想体系就是这样导出的．

十七世纪的大思想家所想象的科学的正当程序，后来确实证明是有益的．用理性去寻求自然界定律，到了 Newton 的时代，在薄弱的观察和实验的基础上，导出了极有价值的结果．十六、十七世纪的巨大科学成就是在天文学和力学方面，关于前者，观测只给出了很少一点新鲜的东西；关于后者，实验的结果，很难说是惊人的，而且确实是没有决定性的．但是，数学理论却达到了广博与完善的地步．在后来的两个世纪中，科学家根据极少甚至琐碎的观测和实验，给出了深刻而广泛的自然定律．

Galileo, Huygens 和 Newton 都期望有少数实验就够了．这期望是容易理解的，因为他们都相信自然界是用数学设计的，所以照他们看来，没有理由不按照数学家搞数学的程序去进行科学的

研究. 正如 John Herman Randall 在«近代思想的形成»(*Making of the Modern Mind*) 一书中所说的, “科学产生于用数学解释自然这一信念…….”

但是, Galileo 确实从经验中得出几个原则, 而且在这个工作中, 他的研究方式截然不同于他的前辈的研究方式. 他断定: 人必须深入到现象的基本中去,而把后者作为起点. 在«关于两门新科学的对话»中,他说,处理无穷多样的重量,形状和速度是不可能的. 他曾经观察到不同的物体在空气里降落的速度差异, 比在水里的要小. 所以, 介质越稀薄, 物体下降的差异越小. “当观察到这点之后,我就得出结论: 在一个完全没有阻力的介质中,所有物体以同一速度降落.” Galileo 在这里所做的是去掉偶然的或次要的效应,去得到首要的效应.

当然, 实际的物体是在有阻力的介质中降落的, 对于这些运动,Galileo 该怎样说呢?他的回答是:“……因此, 为了科学地进行处理, 必须割掉这些困难[空气阻力, 摩擦力等], 在无阻力的情形下,发现并且证明这些定理之后,再按照实际经验所给予的限制来应用这些定理.”

去掉空气阻力和摩擦力之后, Galileo 找出了在真空里运动的基本定律. 这样, 他不仅用物体在空的空间中运动的概念来驳斥 Aristotle, 甚至驳斥 Descartes; 而且他所做的, 正如数学家在研究实际图形时所做的那样. 数学家从线上去掉分子构造, 颜色和厚度而得到线的基本性质,然后就集中研究这些性质. Galileo 就是这样深入到物理因素的. 数学的抽象方法确实离开了现实, 但是说也奇怪,当回到现实时,它却比所有因素都考虑进去更为有力.

以上所说的是 Galileo 所表述的一些方法论原理,其中有许多是由于受到数学的研究方式——数学用以研究几何的方式——的启发而来的. 他的下一个原理,是关于数学本身的应用,但只是一个特殊方式的应用. Aristotle 派和中世纪的科学家都倒向质的方

面、他们认为质是基本的，他们研究了质的获得与丧失，辩论了质的意义；Galileo 和他们不同，主张寻求量的公理．这个改变最为重要．我们稍后将看到它的全部意义，现在举个简例也许有用．Aristotle 派说，球的降落，是因为它有重量；它落在地上，是因为任何物体都要找它的自然位置；而重物的自然位置是地球的中心．这些原理都是属于质的．甚至 Kepler 的第一运动定理——行星的轨道是椭圆——也是属于质的．与此相反，让我们来看这一叙述：球在降落中每秒钟的速度，以英尺计，是 32 乘以开始降落后所经历的秒数，用符号表出便是 $v=32t$．这是一个关于球如何降落的量的叙述．Galileo 着意于找出这样的叙述作为公理，并期望用数学方法得出一些推论，这些推论将仍给出量的知识．另外，我们已经看到，数学是他要用的主要工具．

决定去寻求用公式表达的量的知识，带来了另一个根本的决定，虽然同这一根本的决定初次接触时，很难揭示出它的全部意义．Aristotle 派相信，科学的任务之一是要解释事情为什么发生；解释一词意味着把现象的原因挖掘出来．“物体降落，因为它有重量”这一叙述给出降落的直接原因，而“物体找它的自然位置”这一叙述则给出最后原因．但是，量的叙述 $v=32t$，不管它价值如何，没有解释物体为什么降落，它只说明速率是怎样随着时间而变的．换句话说，公式不解释，只描写．Galileo所寻求的自然知识，是描写性的．他在«两门新科学»中说：“落体运动的加速度的原因何在，不是研究工作的必要部分．”更一般些，他指出，他将研究并证明运动的若干性质，而不管其原因是什么．实证的科学探讨，要同最后原因的问题分开，对于物理原因的忖测应该放弃．

对 Galileo 的这个原理的初次反应，势必是否定的．用公式描写自然现象，只能说是第一步．Aristotle 派好象实际上已掌握了科学的真正作用，这就是解释种种现象为什么发生．甚至Descartes 对 Galileo 追求描写性公式的决定也提出抗议．他说：“Galileo 关

于真空中落体所说的一切都是没有根据的，他应该首先定出重量的本质.”他又说，Galileo 应该在最后的理由上着想. 但是，再过几章之后，我们将清楚地看到，Galileo 追求描写的决定，是历来关于科学方法论的最深刻最有成效的思想.

尽管 Aristotle 派已经谈到一些关于质的名词，例如流动性，刚性，要素，自然位置，自然的和猛烈的运动，以及潜势等，Galileo 却选择了一组全新的可以测量的概念，使得它们的测度可以用公式联系起来. 这组概念包括距离、时间、速度、加速度、力、质量和重量等. 这些概念我们是太熟悉了，不觉得有什么奇怪，但在 Galileo 的时代，这是彻底的改造，至少作为基本概念来说是如此；这些概念在了解和掌握自然的努力中，已证明是最有帮助的.

我们已经描述出 Galileo 程序的主要特点. 其中有些思想是别人曾经提出过的，有些则完全是他自己的创造. 但是，Galileo 的卓越之处在于他非常清楚地看出当时科学研究工作中的错误和缺点，彻底地抛弃了旧的方式，而又非常明白地制定了新的程序. 另外，在应用这些程序于运动问题时，他不但表演了这个方法，而且成功地获得了辉煌的成果——换句话说，他证明了他的程序是有效的. 他工作的完整，思想和表达的明晰以及论辩的力量，影响了几乎所有他的同辈和后辈. Galileo 是近代科学方法论的奠基人. 他完全意识到他的成就（见本章开端处的引言）. 别人也意识到他的成就，哲学家 Hobbes 谈到 Galileo 时说：“他是第一个给我们打开通向整个物理领域的门的人.”

我们不能细述科学方法论的历史；但因数学在这个方法论中非常重要，而这个方法论的采用，又反过来大大促进了数学，我们就应该注意到象 Newton 这样的大人物，是怎样全盘地接受了 Galileo 的程序的. Newton 断言，需要用实验来提供基本定律. 他又明白知道：在得到一些基本原理之后，科学的作用就是从这些原理推出新的事实. 他在他所著的《原理》的序文中说：

> 古代人(正如 Pappus 告诉我们的那样)在自然事物的研究中,把力学科学推崇到极端重要的地位,而近代人则排除物体的形式和玄妙的质,努力把自然现象放在数学的控制之下. 本此理由,我在这本书里,培育数学直至它联系到哲学[科学]时为止……所以我献出这本书作为哲学的数学原理,因为哲学的整个负担似乎在于——从运动现象去考察自然的力,然后从这些力去阐明其他现象……."

当然,数学原理,对 Newton 和对 Galileo 一样,都是量的原理. 他在《原理》中说,他的目的,是要发现并宣告"一切事物按测度,数目和重量安排"的准确方式. Newton 有充分理由来强调与物理解释针锋相对的量的数学定律,因为在他的天体力学里,中心的物理概念是引力,而引力的作用是完全不能用物理的术语解释的. Newton 不给解释,只给出一个显明而有用的数量公式,表明引力是怎样作用的. 这就是为什么他在《原理》的开端处说:"因此,我计划在这里只给出这些力的数学概念,不考虑它们的物理原因和根底." 在书的接近末尾的地方,他又重复他的思想:

> 但是我们的目的,是要从现象中寻出这个力的数量和性质,并且把我们在简单情形下发现的东西作为原理. 通过数学方法,我们可以估计这些原理在较为复杂情形下的效果……我们说通过数学方法(着重号是 Newton 加的),是为了避免关于这个力的本性或质的一切问题,这个质是我们用任何假设都不会确定出来的.

放弃物理的机械解释而改用数学的描写,甚至杰出的科学家也感到震惊. Huygens 认为引力的概念是"荒谬的",因为穿越空的空间的作用,排除了任何机械的解释. 他很惊讶 Newton 竟然

自找麻烦去做这样多费力的计算,其中除了引力的数学原理以外,别无根据. Leibniz 攻击引力, 说它是一个无实质而又不可解释的力量. John Bernoulli (James 的弟弟)也否定了它, 认为它"背叛了那些习惯于除了无可争辩和论据确凿的物理原理而外, 不接受任何物理原理的思想." 但是, 只有依靠数学的描写(即使完全缺乏物理的了解时也依靠它)才使得 Newton 的惊人贡献成为可能,更不用说后来的发展了.

由于科学变得沉重地依赖于——几乎附属于——数学, 所以扩展数学领域和数学技术的人是科学家; 而科学所提供的种种问题,给数学家的创造性工作,指出了许多重要的方向.

4. 函数概念

按照 Galileo 程序进行的科学探讨,其第一个数学收获来自对运动的研究. 这个问题吸引了十七世纪的科学家和数学家. 其原因是容易知道的. 虽然在十七世纪的早期,特别是在 Galileo 给太阳中心论增添了证据之后, Kepler 的天文学已为一般人所接受. 但是他的椭圆运动定律只是近似的, 除非天空只有太阳和一个行星(在这个理想情形下, 该定律是准确的). 人们已经在考虑着这样一些思想: 每个行星的椭圆运动受到其他行星的干扰,月球绕地球的椭圆运动受到太阳的干扰; 事实上,作用于任何两个物体间的引力的概念,已由 Kepler (还有别人)提示过. 因此, 如何改进计算行星位置的问题还未解决. Kepler 得到他的定律, 主要是依靠用曲线去配合天文数据, 但他并没有根据基本的运动定律去解释为什么行星沿着椭圆轨道运动. 关于如何从运动原理导出 Kepler 定律这一基本问题,是一个明显的挑战.

改进天文学理论, 还有一个实用的目的. 为了寻找原料和通商,欧洲人已从事于大规模的、看不见陆地的长距离海航. 因此水

手们就需要测定纬度和经度的准确方法. 纬度可以通过观察太阳或恒星来确定, 但测定经度则远较困难. 十六世纪中的测经度的办法是这样地不准确以至经常产生大约500英里的误差. 到了大约1514年之后, 经度是用月球对一些恒星的相对方向来确定的. 并且把从某个标准地点在不同时间观测到的相对方向制成表册. 航海者可以测定月球的方向(人所在的地点虽不同, 但不太影响月球的方向), 又可以利用例如恒星的方向来测定他的当地时间, 于是他就可以根据所测定的月球方向直接查表或通过插值, 找出标准地点的时间, 从而算出他所测定的当地时间和标准地点的时间之差. 时间上差一小时意味着经度上差15度. 不过, 这个方法也不准确. 由于那时的船在水上起伏不定, 要得到月球的准确方向是困难的; 另一方面, 由于月球相对于恒星的运动, 在几个小时内不会太大, 月球的方向必须较为准确地测定. 角度上差一分就意味着经度上差半度; 但是要使误差小于一分, 在当时是远远做不到的. 虽然有人提出过并且试用过其他测定经度的方法, 但是, 为了扩展并改进已有的表册, 进一步了解月球的轨道看来是必要的, 而且许多科学家, 包括 Newton, 都研究过这个问题. 就是在 Newton 的时代, 关于月球位置的知识, 仍是这样地不准确以致用表册来确定船在海中的位置, 可以导致大到100英里的误差.

那时航运的损失很大, 欧洲各国政府甚为关心. 1675年, 英王 Charles 二世在格林威治(Greenwich)建立起皇家观测台, 以期对月球运动得到较好的观测, 并且把该台作为测定经度的固定站. 1712年, 英国政府设立一个"经度测定委员会", 并且设置高到两万英镑的奖金来征求测量经度的方案.

十七世纪的科学家也面临着解释地球运动的问题. 按照太阳中心的理论, 地球既自转又围绕太阳运行. 为什么物体应该呆在地球上呢? 既然地球不再是宇宙的中心, 为什么下降的物体还要落到地球上呢? 不仅如此, 从一切运动, 例如抛射体的运动来看,

好象地球是静止的. 这些问题激起了许多人的注意, 其中包括 Cardan, Tartaglia, Galileo 和 Newton. 抛射体的路线, 射程和所能达到的高度, 以及炮弹的速度对于高度和射程的影响都是基本的问题, 因而当时的亲王们, 和现在的国家一样, 花了大量的钱来谋求解决. 这就需要有新的运动原理来解释地球的现象; 科学家们就想到: 因为宇宙据信是按照一个宏伟的计划造成的, 所以能解释地球运动的原理, 也能解释天体的运动.

从各种运动问题的研究中出现了一个特殊的问题: 如何设计一些较为准确的方法来测量时间. 从 1348 年以后通用的机械钟是不够准确的. 法兰德斯 (Flemish) 的制图家 Gemma Frisius (1508～1555) 曾提出用时钟来测定经度. 在一个已知经度的地方把钟对好, 放在船上; 因为船的当地时间比较容易确定, 例如按太阳的位置来确定, 所以航海者只须记下这两个时间的差数, 就能立刻把这个差数翻译成经度的差数. 但是截止到 1600 年, 还没有准确的, 耐久的, 适用于航海的钟.

单摆的运动似乎提供了测量时间的基本装置. Galileo 已注意到摆的一个往复所用的时间是固定的, 而且看来是与摆幅无关的. 他设计了摆钟, 并且叫他的儿子造出一个来. 但是, 对单摆作出基本工作的, 却是 Robert Hooke 和 Huygens. 虽然摆钟不适于用在船上(为了计算经度, 钟每天的误差不得超过二或三秒, 而船的运动对摆的影响很大), 但它在科学工作中以及家庭和商业方面的计时上, 确实是有很大价值的. 适用于航海的钟终于由 John Harrison(1693～1776) 在 1761 年设计出来, 在十八世纪之末开始使用. 在这之前, 由于没有适当的钟, 所以关于月球运动的准确观测, 还是那个世纪的主要科学问题.

数学从运动的研究中引出了一个基本概念. 在那以后的二百年里, 这个概念在几乎所有的工作中占中心位置, 这就是函数——或变量间的关系——的概念. Galileo 创立近代力学的著作《两门

新科学»一书，几乎从头至尾包含着这个概念. Galileo 用文字和比例的语言表达函数关系. 例如，在他的关于材料力学的作品中，他有时说："两个等体积圆柱体的面积(底面积除外)之比，等于它们高度之比的平方根." 又如："两个侧面积相等的正圆柱，其体积之比等于它们高度之比的反比." 在他的关于运动的作品中，他说(例如)："从静止状态开始以定常加速度下降的物体，其经过的距离，与所用时间的平方成正比.""沿着同高度但不同坡度的倾斜平板下滑的物体，其下滑的时间与平板的长度成正比." 这些话清楚地表明他是在讨论变数和函数，只差把文字叙述表为符号形式这短短的一步了. 因为代数的符号化那时正在扩展，所以不久之后，Galileo 关于落体距离的叙述就写为 $s=kt^2$，关于沿斜板下滑时间的叙述就写为 $t=kl$ 了.

在十七世纪引进的绝大部分函数，在函数概念还没有充分认识以前，是当作曲线来研究的. 例如，关于 $\log x$，$\sin x$ 和 a^x 等初等超越函数的研究就是这样. Galileo 的学生 Evangelista Torricelli (1608～1647) 在1644年的一封信里，描述他对曲线(用现在的写法)$y=ae^{-cx}(x\geqslant 0)$的研究(他的原稿直到 1900 年才刊出). 他是受到当时的对数工作的启发而考虑这条曲线的. Descartes 在 1639 年也碰到过这条曲线，但没有谈到它和对数的关系. 正弦曲线是通过 Roberval 关于旋轮线的研究，作为旋轮线的伴侣曲线而进入数学的(第 17 章第 2 节). Wallis 在他的«力学»(*Mechanica*, 1670)中给正弦曲线画了两个周期的图. 当然，到了那时期，列在表里的三角函数和对数函数的值，是非常精确的.

另一与此有关的事，是用运动概念来引进旧的和新的曲线. 在希腊时代，有少数曲线，例如割圆曲线和 Archimedes 螺线，是用运动定义的. 但在那时这些曲线不属于正规数学的范围. 到了十七世纪，看法就不同了. Mersenne 在 1615 年把前人已知的曲线 cycloid (旋轮线)定义为当车轮沿地面滚转时轮上一个定点的轨

迹. Galileo 证明: 把物体斜抛(即与地平线成一角度)向空中时, 它的路径是一个 parabola (抛物线), 因而把这曲线看做是动点的轨迹.

把曲线看作是动点的路径这一概念, 通过 Roberval, Barrow 和 Newton 而获得明显的认可与接受. Newton 在他的«求曲边形的面积»(*Quadratare of Curves*, 写于 1676 年)中说:"我认为这里的数学量,不是由小块合成的,而是由连续运动描出的. 线[曲线]是描画出来的,因而它的产生不是由于凑零为整,而是由于点的连续运动……. 这样的起源,真正发生在事物的本性中,并且是日常从物体的运动中看见的."

逐渐地就给这些曲线所代表的各种类型的函数引进了名词和记号. 但还存在着许多没有认识到的细微的难点. 例如, 在十七世纪中,函数 a^x(x 是正负整数或分数)的使用,已经很普通了. 那时假定(此假定一直到十九世纪定义了无理数之后才取消)此函数对于无理数也有意义. 因此人们对于形如 $2^{\sqrt{2}}$ 的式子没有发生过疑问,而默认为它的值位于同样形式的两个数之间,其中一个的指数是小于 $\sqrt{2}$ 的任何有理数, 另一个的指数是大于 $\sqrt{2}$ 的任何有理数.

Descartes 所提的几何曲线和机械曲线的区别, 引出了代数函数和超越函数的区别. 幸而 Descartes 的同时代人没有注意到他排斥机械曲线的事. 通过求面积,求级数和, 以及进入微积分里的其他运算, 人们发现并研究了许多超越函数. James Gregory 在 1667 年证明圆扇形的面积不能表为圆半径和弦的代数函数, 从而明确了代数函数和超越函数的区别. Leibniz 证明 $\sin x$ 不可能是 x 的代数函数, 无意中证明了 Gregory 所寻求的结果(2). 对于超越函数的完全了解和使用就渐渐地实现了.

十七世纪中,函数概念的定义,以 James Gregory 在他的论文

(2) *Math. Schriften*, 5, 97~98.

«论圆和双曲线的求积»(*Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura*, 1667) 中所给出的最为明显. 他定义函数是这样一个量: 它是从一些其他的量经过一系列代数运算而得到的, 或者经过任何其他可以想象到的运算而得到的. 这最后一句话的意思, 据他的解释是: 除了五种代数运算以外,必须再加上一个第六种运算,即趋于极限的运算(我们将在第17章中看到 Gregory 所关心的是求面积的问题). Gregory 的定义被遗忘了, 但无论如何, 不久就证明他的定义太窄, 因为函数的级数表示式, 不久就广泛地使用开了.

自从 Newton 于1665年开始微积分的工作之后, 他一直用"流量"(fluent)一词来表示变量间的关系. Leibniz 在他1673年的一篇手稿里用"函数"(function)一词来表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量——例如, 切线, 法线, 次切线等的长度以及纵坐标等. 至于该曲线本身,据他说是由一个方程式给出的. Leibniz 又引进"常量"、"变量"和"参变量",这最后一词是用在曲线族中的[3]. John Bernoulli 自1697年起就谈到一个按任何方式用变量和常量构成的量[4]("任何方式"一词, 据他说是包括代数式子和超越式子而言). 到1698年他采用了 Leibniz 的"x 的函数"一词, 作为他这个量的名字. Leibniz 在他的著作«历史» (1714) 中,用"函数"一词来表示依赖于一个变量的量.

在符号方面, John Bernoulli 利用 X 或 ξ 表示一般的 x 的函数, 但到了1718年他又改写为 ϕx. Leibniz 同意这样做, 但又提出用 x^1, x^2 等来表示 x 的函数, 其上标是在同时考虑几个函数时用的. 记号 $f(x)$ 是 Euler 于1734年引进的[5]. 从此函数概念就

(3) *Math. Schriften*, 5, 266～269.

(4) *Mém. de l'Acad. des Sci.*, Paris, 1718, 100 ff. = *Opera*, 2, 235～269, p. 241 in particular.

(5) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 184～200, pub. 1740 = *Opera*, (1), 22, 57～75.

成了微积分里的中心概念．我们以后将看到这个概念的扩展情况。

参考书目

Bell, A. E.: *Christian Huygens and the Development of Science in the Seventeenth Century*, Edward Arnold, 1947.

Burtt, A. E.: *The Metaphysical Foundations of Modern Physical Science*, 2nd ed., Routledge and Kegan Paul, 1932, Chaps. 1～7.

Butterfield, Herbert: *The Origins of Modern Science*, Macmillan, 1951, Chaps. 4～7.

Cohen, I. Bernard: *The Birth of a New Physics*, Doubleday, 1960.

Coolidge, J. L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, pp. 119～127.

Crombie, A. C.: *Augustine to Galileo*, Falcon Press, 1952, Chap. 6.

Dampier-Whetham, W. C. D.: *A History of Science and Its Relations with Philosophy and Religion*, Cambridge University Press, 1929, Chap. 3.

Dijksterhuis, E. J.: *The Mechanization of the World Picture*, Oxford University Press, 1961.

Drabkin, I. E., and Stillman Drake: *Galileo Galilei: On Motion and Mechanics*, University of Wisconsin Press, 1960.

Drake, Stillman: *Discoveries and Opinions of Galileo*, Doubleday, 1957.

Galilei, Galileo: *Opere*, 20 vols., 1890～1909, reprinted by G. Barbera, 1964～1966.

Galilei, Galileo: *Dialogues Concerning Two New Sciences*, Dover (reprint), 1952.

Hall, A. R.: *The Scientific Revolution*, Longmans Green, 1954, Chaps. 1～8.

Hall, A. R.: *From Galileo to Newton*, Collins, 1963, Chaps. 1～5.

Huygens, C.: *Œuvres complètes*, 22 vols., M. Nyhoff, 1888～1950.

Newton, I.: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, University of California Press, 1946.

Randall, John H., Jr.: *Making of the Modern Mind*, rev. ed., Houghton Mifflin, 1940, Chap. 10.

Scott, J. F.: *The Scientific Work of René Descartes*, Taylor and Francis, 1952, Chaps. 10～12.

Smith, Preserved: *A History of Modern Culture*, Henry Holt, 1930, Vol. 1, Chaps. 3, 6, and 7.

Strong, Edward W.: *Procedures and Metaphysics*, University of California Press, 1936, Chaps. 5～8.

Whitehead, Alfred North: *Science and the Modern World*, Cambridge University Press, 1926, Chap. 3.

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*, 2nd ed., George Allen and Unwin, 1950, Chap. 3.

17

微积分的创立

他以几乎神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图象，彗星的轨道和大海的潮汐。

Newton 墓志铭

1. 促使微积分产生的因素

紧接着函数概念的采用，产生了微积分，它是继 Euclid 几何之后，全部数学中的一个最大的创造．虽然在某种程度上，它是已被古希腊人处理过的那些问题的解答，但是，微积分的创立，首先是为了处理十七世纪主要的科学问题的．

有四种主要类型的问题．第一类是：已知物体移动的距离表为时间的函数的公式，求物体在任意时刻的速度和加速度；反过来，已知物体的加速度表为时间的函数的公式，求速度和距离．这类问题是研究运动时直接出现的，困难在于：十七世纪所涉及的速度和加速度每时每刻都在变化．比如，计算瞬时速度，就不能象计算平均速度那样，用运动的时间去除移动的距离，因为在给定的瞬刻，移动的距离和所用的时间都是 0，而 0/0 是无意义的．但是，根据物理，每一个运动的物体在它运动的每一时刻必有速度，这也是无疑的．已知速度公式求移动距离的问题，也遇到同样的困难；因为速度每时每刻都在变化，所以不能用运动的时间乘任意时刻的速度，来得到移动的距离．

第二种类型的问题是求曲线的切线．这个问题的重要性来源于好几个方面；它是纯几何的问题，而且对于科学应用有巨大的重

要性. 正如我们知道的那样，光学是十七世纪的一门较重要的科学研究. 透镜的设计直接吸引了 Fermat, Descartes, Huygens 和 Newton. 要研究光线通过透镜的通道，必须知道光线射入透镜的角度以便应用反射定律. 重要的角是光线同曲线的法线间的夹角（图 17.1). 法线是垂直于切线的，所以问题在于求出法线或者是求出切线. 另一个涉及到曲线的切线的科学问题出现于运动的研究中. 运动物体在它的轨迹上任一点处的运动方向，是轨迹的切线方向.

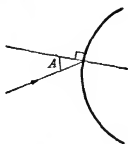


图 17.1

实际上，甚至“切线”本身的意义也是没有解决的问题. 对于圆锥曲线，把切线定义为和曲线只接触于一点而且位于曲线的一边的直线就足够了；这个定义古希腊人曾经用过. 但是对于十七世纪所用的较复杂的曲线，它就不适用了.

第三类问题是求函数的最大值与最小值. 炮弹在炮筒里射出，它运行的水平距离，即射程，依赖于炮筒对地面的倾斜角，即发射角. 一个“实际”问题是求能获得最大射程的发射角. 十七世纪初期，Galileo 断定(在真空中)最大射程在发射角是 45° 时达到；他还得出炮弹从各个不同角度发射后所达到的不同的最大高度. 研究行星的运动也涉及最大值和最小值的问题，例如求行星离开太阳的最远和最近的距离.

第四类问题是求曲线长(例如，行星在已知时期中移动的距离)；曲线围成的面积；曲面围成的体积；物体的重心；一个体积相当大的物体(例如行星)作用于另一物体上的引力. 古希腊人用穷竭法求出了一些面积和体积. 尽管他们只是对于比较简单的面积和体积应用了这个方法，但也必须添上许多技巧，因为这个方法缺乏一般性. 他们还经常得不到数字的解答. 当 Archimedes 的工作在欧洲闻名时，求长度、面积、体积和重心的兴趣复兴了. 穷竭法

先是逐渐地被修改，后来由于微积分的创立而被根本地修改了.

2. 十七世纪初期的微积分工作

微积分问题至少被十七世纪十几个最大的数学家和几十个小一些的数学家探索过. 位于他们全部贡献的顶峰的是 Newton 和 Leibniz 的成就. 这里我们只能谈谈这两位大师的一些先驱者的主要贡献.

从距离(作为时间的函数)求瞬时速度的问题以及它的逆问题，不久就被看出是计算一个变量对另一个变量的变化率的问题以及它的逆问题的特例. 一般变化率问题的第一个有效的解决属于 Newton，这将放在后面考察.

先叙述几种求曲线的切线的方法. Gilles Persone de Roberval (1602～1675)在他的《不可分量论》(*Traité des indivisibles*,此书注着 1634 年，可是直到1693年才出版)中，推广了Archimedes用来求他的螺线上任一点处切线的方法. 同 Archimedes 一样，Roberval 认为曲线是一个动点在两个速度作用下运动的轨迹. 例如，从炮筒里发射的炮弹是在水平速度 PQ 和垂直速度 PR 的作用下，见图 17.2. 这两个速度的合速度是 PQ 和 PR 构成的平行四边形的对角线. 他把这条对角线作为在 P 点的切线. 正如 Torricelli 指出的那样，Roberval 的方法是应用了 Galileo 已经宣布过的法则，即水平的和垂直的速度是彼此独立地作用着的. Torricelli本人应用 Roberval 的方法，求得了曲线(按我们的写法)$y=x^n$ 的切线.

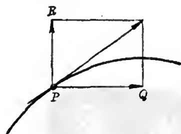


图 17.2

把切线定义为合速度方向的直线，比古希腊人把它定义为接触曲线于一点的直线要复杂些，但这个较新的概念适用于许多旧

概念不能适用的曲线．一方面，这个概念是有价值的，因为它把纯几何同力学联系起来了，而在 Galileo 以前，这个联系是根本没有的．但在另一方面，这个切线的定义在数学领域内是令人讨厌的，因为它是在物理的概念上定义切线的．很多曲线是在与运动无关的情况下产生的，切线的这个定义就相应地不适用了．所以求切线的其他方法受到欢迎．

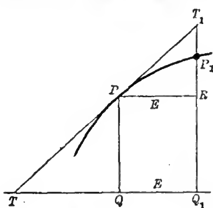


图 17.3

Fermat 的方法是他在 1629 年已设计好，但在他 1637 年的手稿《求最大值和最小值的方法》[1]中才发现的．这方法实质上就是现在的方法．设 PT 是曲线上一点 P 处的切线(图 17.3)．TQ 的长叫次切线．Fermat 的计划是求出 TQ 的长度，从而知道 T 的位置，最后就能作出 TP．

设 QQ_1 是 TQ 的增量，长度为 E．因为 $\triangle TQP \backsim \triangle PRT_1$，所以

$$TQ:PQ=E:T_1R.$$

但是，Fermat 说，T_1R 和 P_1R 是差不多长的；因此

$$TQ:PQ=E:(P_1Q_1-QP).$$

用我们现在的符号，把 PQ 叫做 $f(x)$，我们就有

$$TQ:f(x)=E:[f(x+E)-f(x)].$$

因此，
$$TQ=\frac{E\cdot f(x)}{f(x+E)-f(x)}.$$

对于 Fermat 所处理的 $f(x)$，马上就可以用 E 除上面分式的分子和分母．然后令 $E=0$(他说是去掉 E 项)，就得到 TQ．

Fermat 应用他的切线方法于许多难题．虽然这个方法完全依赖于深奥的极限理论，但它具有微分学的现在的标准方法的

(1) *Œuvres*, 1, 133～179; 3, 121～156.

形式。

对于 Descartes，求曲线的切线的问题是重要的，因为通过它能获得曲线的性质——例如两条曲线相交的角度。他说："这不但是我所知道的最有用最一般的问题，而且，甚至可以说，是我仅仅想要在几何里知道的问题."他在《几何》的第二册中给出了他的方法．这是纯代数的，不牵涉极限概念；相反，Fermat 的方法，如果严密地阐述的话，就要牵涉到极限．但是 Descartes 的方法，仅仅对于方程形式是 $y=f(x)$（其中 $f(x)$ 是简单的多项式）的曲线有用．虽然 Fermat 的方法是普遍的，但 Descartes 却认为自已的方法较好．Descartes 批评了 Fermat 的方法（应该承认，这个方法在当时表达得不清楚），而且想用自己的思想去解释它．而 Fermat 却也宣称他的方法优越，他看到了用小增量 E 的好处．

Isaac Barrow (1630～1677) 也给出了求曲线的切线的方法．Barrow 是剑桥大学的数学教授，精通希腊文和阿拉伯文，他能够翻译一些 Euclid 的著作并修改一些 Euclid, Apollonius, Archimedes 和 Theodosius 的作品的译文．他的主要著作《几何讲义》(*Lectiones Geometricae*, 1669) 是对微积分的一个巨大贡献．其中他应用了几何法，正如他所指出的："从讨厌的计算重担中解放出来." 1669 年 Barrow 辞去了他的教授席位并让给 Newton，自己转向神学的研究．

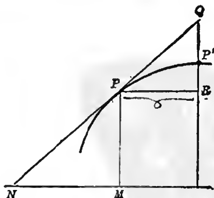


图 17.4

Barrow 的几何法相当复杂，而且用了辅助曲线．但有一个特点值得注意，因为它反映出那个时代的思想；这就是利用所谓微分三角形或者特征三角形．他是从三角形 PRQ 出发的（图 17.4），这个三角形是增量 PR 的产物，他用了这个三角形相似于三角形 PMN 的事实，断定切线的斜率 QR/PR 等

于 PM/MN. Barrow 说，当弧 PP' 足够小的时候，我们可以放心地把它和 P 点切线的一段 PQ 等同起来. 三角形 PRP'(图 17.5) 是特征三角形，其中 PP' 既是曲线的弧长，又是切线的一部分. 很早以前 Pascal 在求面积时用过特征三角形，在他以前别人也用过.

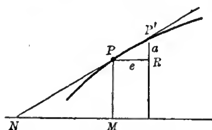


图 17.5

在《讲义》的第十讲中，Barrow 还是依靠计算，求出曲线的切线. 实质上，他的方法和 Fermat 的方法是一致的. 他用了曲线的方程，例如 $y^2=px$，并用 $x+e$ 代替 x，用 $y+a$ 代替 y. 这时

$$y^2+2ay+a^2=px+pe.$$

消去 $y^2=px$，得到

$$2ay+a^2=pe.$$

然后他去掉 a 和 e 的高次幂(如果有的话)，这相当于用图 17.5 中的 PRP' 代替图 17.4 中的 PRP'. 由此得出

$$\frac{a}{e}=\frac{p}{2y}.$$

这时，他说明 $a/e=PM/NM$，所以

$$\frac{PM}{NM}=\frac{p}{2y}.$$

因为 PM 是 y，所以他算出 NM，即次切线，从而知道 N 的位置.

关于第三类问题，即求函数的最大值和最小值的问题，这方面的工作，可以说是由 Kepler 的观测开始的. 他对酒桶的形状感兴趣；在他的《测量酒桶体积的新科学》(*Stereometria Doliorum*, 1615)中，他证明在所有内接于球面的，具有正方形底的正平行六面体中，立方体的容积最大. 他的方法是对特殊选择的尺寸计算容积，这本身并不重要；但他注意到，当越来越接近最大体积时，对应于一个尺寸固定的变化，体积的变化越来越小.

Fermat 在他的《求最大值和最小值的方法》中给出了他的方法，并用下面的例子进行说明：已知一条直线(段)，要找出它上面的一点，使被这点分成的两部分线段组成的矩形最大．他把整个线段叫做 B，并设它的一部分为 A．那么矩形的面积就是 $AB-A^2$．然后他用 $A+E$ 代替 A，这时另外一部分就是 $B-(A+E)$，矩形的面积就成为 $(A+E)(B-A-E)$．他把这两个面积等同起来，因为他认为，当取最大值时，这两个函数值——即两个面积——应该是相等的．所以

$$AB+EB-A^2-2AE-E^2=AB-A^2.$$

两边消去相同的项并用 E 除两边后，得到

$$B=2A+E.$$

然后令 $E=0$(他说去掉 E 项)，得到 $B=2A$．因此这矩形是正方形．

Fermat 说，这个方法是完全普遍的；他这样描述道：如果 A 是自变量，并且如果 A 增加到 $A+E$，那么，当 E 变成无限小，且当函数经过一个极大值(或极小值)时，函数的前后两个值将是相等的．把这两个值等同起来；用 E 除方程，然后使 E 消失，就可以从所得的方程，确定使函数取最大值或最小值的 A 值．这个方法实质上是他用来求曲线的切线的方法．但是基本的事实在那儿是两个三角形相似；而在这里是两个函数值相等．Fermat 没有看到有必要去说明先引进非零 E，然后在用 E 通除之后，令 $E=0$ 的合理性(2)．

十七世纪求面积，体积，重心，曲线长的工作开始于 Kepler，据说他被体积问题吸引住了，因为他注意到酒商用来求酒桶体积的方法不精确．用现在的标准来看，(在《测量酒桶体积的新科学》

(2) 对于他的在令 $E=0$ 之前的方程，Fermat 用了名词 "*adaequalitas*"，Carl B. Boyer 在《微积分概念》(*The Concepts of the Calculus*)的 p. 156 中，恰当地把它译为"假等式"．

中的)这个工作是粗糙的．例如，圆的面积对他来说是无穷多个三角形的面积，每个三角形的顶点在圆心，底在圆周上，然后由正内接多边形的面积公式，周长乘上半径除以2，他就得到了圆的面积．类似地，他认为球的体积是小圆锥的体积的和，这些圆锥的顶点在球心，底在球面上．他把圆锥看成是非常薄的圆盘的和，并由此算出它的体积．然后他进而证明球的体积是半径乘球面积的三分之一．在 Archimedes 的《球和柱》(*Spheroids and Conoids*)的启发下，他把面积旋转成新的图形，并计算其体积．同样地，他把被弦割下的弓形绕着弦旋转，并求其体积．

用无数个同维的无穷小元素之和来确定曲边形面积和体积，是 Kepler 方法的精华．把圆看作是无数个三角形的和，在他的思想中是用连续性原理(第14章第5节)证明的．他看到两种图象本质上没有区别．由同样的理由，一条直线和一个无穷小面积实际上是一样的；而且，在一些问题中，他的确认为面积就是直线的和．

在《两门新的科学》中，Galileo 对于面积的想法和 Kepler 的想法相似；在处理匀加速运动的问题时，他给出论据，证明在时间–速度曲线下的面积就是距离．假定一个物体以变速 $v=32t$ 运动，这个速度在图 17.6 中用直线表示；那么，在时间 OA 通过的距离就是面积 OAB．Galileo 得到这个结论，是认为 $A'B'$ 是某个瞬刻的速度，又是所走过的无穷小距离(如果乘上一个无穷短的时间，认为它就是距离)，然后证明由直线 $A'B'$ 组成的面积 OAB 必定是

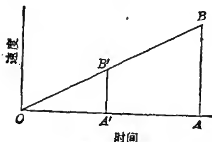


图 17.6

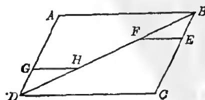


图 17.7

总的距离. 因为 AB 是 $32t$, OA 是 t, 所以 OAB 的面积是 $16t^2$. 这个推理当然是不清楚的. 但在 Galileo 的思想里, 却得到一种哲学观点的支持, 即面积 OAB 是由 $A'B'$ 那样无数多个不可分的单位堆积而成的. 他在线段和面积一类的连续量的结构问题上花了很多时间, 但没有得到解决.

Bonaventura Cavalieri (1598～1647) 是 Galileo 的学生, 波罗葛那 (Bologna) 学府的教授. 他在 Kepler 和 Galileo 的影响下, 并在后者的敦促下, 考查了微积分问题. Cavalieri 把 Galileo 和其他人在不可分量方面的思想发展成几何方法, 并出版了这方面的著作《用新的方法推进连续体的不可分量的几何学》(*Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota*, 1635). 他认为面积是无数个等距平行线段构成的, 体积是无数个平行的平面面积构成的; 他分别把这些元素叫做面积和体积的不可分量. Cavalieri 承认组成面积或体积的不可分量的数目一定是无穷大的, 但他不想在这点上反复推敲. 粗浅地说, 正如 Cavalieri 在他的《六道几何练习题》(*Exercitationes Geometricae Sex*, 1647) 中指出的, 不可分法认为线是由点构成的, 就象链是由珠子穿成的一样; 面是由直线构成的, 就象布是由线织成的一样; 立体是由平面构成的, 就象书是由页组成的一样. 不过, 它们是对于无穷多个组成部分来说的.

Cavalieri 的方法(或者原则)可用下面的命题来说明 (这个命题当然可以用其他方法证明). 为了证明平行四边形 $ABCD$(图 17.7) 是三角形 ABD 或者 BCD 的两倍, 他证明当 $GD=BE$ 时, $GH=FE$. 因此三角形 ABD 和 BCD 是由相等数目的等长线段 GH 和 EF 构成的, 所以, 一定有相等的面积.

这个原则已编入现在通行的立体几何书中, 作为一个定理, 叫做 Cavalieri 定理. 这个原则说, 如果两个立体有相等的高, 而且它们的平行于底面并且离开底面有相等距离的截面面积总有一定

的比的话，那么这两个立体的体积之间也有这个比. 实质上，运用了这个原则，Cavalieri 证明了圆锥的体积是外接圆柱的三分之一. 同样，他考虑了在两条曲线下的面积；用我们的写法，曲线可为 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$，其中 x 的范围相同；把面积看成是纵坐标的和，如果一条曲线的纵坐标与另一条曲线的纵坐标的比是常数，那么 Cavalieri 说，这两个面积也有同样的比. 他用这个方法在《一百道杂题》(*Centuria di varii problemi*, 1639) 中证明：对于从1到9的正整数 n，公式(按我们的记法)

$$\int_0^a x^n\,dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

成立. 可是，他的方法完全是几何的. 他能成功地获得正确的结果，是因为他运用他的原则计算面积间和体积间的比的时候，组成相应的面积和体积的不可分量间的比是常数.

Cavalieri 的不可分法遭到了同时代人的批评. 他企图回答他们，但没有严密的理由. 有些时候他宣称他的方法只是一个避免穷竭法的实用方法. 尽管方法受到批评，但许多数学家还是广泛地利用了它. 另外，象 Fermat, Pascal 和 Roberval 都用了这个方法甚至用了"纵坐标的和"那样的语言，但是他们把面积想成是无数无穷小长方形的和，而不是线的和.

1634年 Roberval(他宣称曾研究过"神圣的 Archimedes")使用了实质上是不可分量去求出旋轮线的一个拱下面的面积，这是 Mersenne 在1629年让他注意的问题. 有时 Roberval 被认为是不可分法的独立发现者，但实际上他相信线、面和体的无限可分性，因此就不存在任何最后的部分. 他的作品以《不可分量论》命名，但是他把他的方法叫做"无穷大法".

Roberval 获得摆线下的面积的方法是有启发性的. 设 $OABP$ (图17.8)是旋轮线的半个拱下的面积. OC 是母圆的直径，P 是拱上的任意一点. 作 $PQ=DF$. Q 的轨迹叫做伴旋轮线(只要原

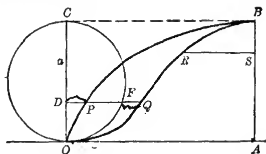


图 17.8

点是 OQB 的中点，x 轴平行于 OA，那么用我们的写法，曲线 OQB 就是 $y=a\sin x/a$，其中 a 是母圆的半径）．Roberval 断言，曲线 OQB 把矩形 $OABC$ 分成两个相等的部分，因为基本上，对于 $OQBC$ 中的每一条线 DQ，在 $OABQ$ 中都相应地有一条线 RS. 所以 Cavalieri 的原理用上了．矩形 $OABC$ 的底和高分别等于母圆的半圆周和直径；因此它的面积是圆面积的 2 倍．而 $OABQ$ 的面积和母圆面积相等．另外，OPB 和 OQB 之间的面积等于半圆 OFC 的面积，这是因为由 Q 的定义，$DF=PQ$，使得这两块面积在每个线段上都有相等的宽．所以在半拱下的面积是母圆面积的 $1^1/_2$ 倍．Roberval 还求出正弦曲线的一个拱下的面积，这拱绕着底旋转后产生的体积，以及其他与旋轮线有关的体积和旋轮线面积的形心．

计算面积、体积和其他量的最重要的新方法，从修改古希腊的穷竭法开始．让我们考虑一个典型的例子：计算抛物线 $y=x^2$ 下

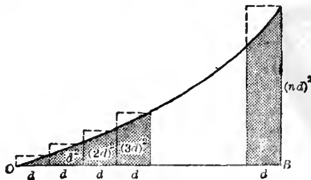


图 17.9

从 $x=0$ 到 $x=B$ 的面积(图 17.9). 穷竭法对于不同的曲线形面积,用不同类型的直线形去逼近,而十七世纪的一些人却采用系统的程序,使用矩形如图所示. 当这些矩形的宽度 d 越来越小时,这些矩形的面积的和就越来越接近曲线下的面积. 如果底宽都是 d,那么,根据纵坐标是横坐标的平方这一抛物线的特性,这和就是

$$d\cdot d^2+d(2d)^2+d(3d)^2+\cdots+d(nd)^2 \tag{1}$$

或者

$$d^3(1+2^2+3^2+\cdots+n^2).$$

因为前 n 个自然数的 m 次幂的和, Pascal 和 Fermat 就为着这样的问题的需要,已经求得,所以数学家能够容易地用

$$d^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) \tag{2}$$

代替上一个式子. 但是 d 是定长 OB 除以 n. 因此(2)式成为

$$OB^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right). \tag{3}$$

现在如果照这些人的说法,认为当 n 是无穷大时,最后两项能够忽略的话,正确的结果就得到了. 那时极限过程还没有提出——或者仅仅是粗糙地觉察到——所以最后两项的省略并没有证明.

我们看到这种方法和穷竭法一样,要求用直线形逼近曲线形. 但是,在最后的步骤中存在着重要的差别: 在老方法中用到间接证明的地方,在这里矩形的数目成为无穷大,而且当 n 成为无穷大时,人们就取(3)的极限——虽然当时他们并没有明显地从极限上着想. 这条新的途径,最早是 Stevin 于 1586 年在他的《静力学》(*Statics*)中提出来的,并有许多追随者,包括 Fermat 在内[3].

如果涉及的曲线不是抛物线,那就必须用问题中曲线的特性代替抛物线的特性,并因此得出一些其他的级数来代替(1). 从类似于(1)的求和得到(2)的类似是需要技巧的. 因此关于面积、体

(3) *Œuvres*, 1, 255～259; 3, 216～219.

积和重心的结果是不多的．当然用强有力的反微分法来计算这样的和的极限的方法，那时候还不能想象．

实质上应用我们刚才说明的求和技巧，Fermat 在 1636 年以前就知道：对于除了 -1 以外的任何有理数 n，有（用我们的记法）(4)

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

这个结果也由 Roberval、Torricelli 和 Cavalieri 各自独立地获得，虽然有些仅仅是几何的形式，有些对 n 加了限制．

在用几何形式求和法的人中间有 Pascal．1658 年他从事于摆线问题研究(5)．他计算出曲线的任一段和平行于底的一直线所包围的图形面积，该图形的形心，以及由该图形绕着它的底（图17.10 中的 YZ）或者垂直线（对称轴）旋转生成的立体的体积．在这一工作中，和在关于 $y=x^n$ 一类曲线下的面积的早期著作中，他把小矩形加起来，其方式与上文处理(1)的方式相同，只不过他的工作与结果都是用几何语言叙述的．他用 Dettonville 的假名提出了他已解决的问题，向其他数学家挑战，然后出版了他自己的卓越的解[«Dettonville 的信»（*Lettres de Dettonville*），1659]．

在 Newton 和 Leibniz 以前，对于把分析方法引入微积分的工作做得最多的人是 John Wallis(1616～1703)．虽然他直到二十岁左右才开始学习数学——他在剑桥大学时是专门研究神学的——但是他在牛津大学成为几何教授而且在那个世纪中是仅次于

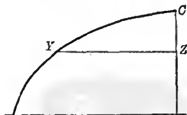


图 17.10

Newton 的最能干的英国数学家．在他的«无穷的算术»（*Arithmetica Infinitorum*, 1655）中，他运用分析法和不可分法求出了许多

(4) *Œuvres*, 1, 255～259; 3, 216～219.

(5) *Traité des sinus du quart de cercle*, 1659＝*Œuvres*, 9, 60～76.

面积并得到广泛而有用的结果.

Wallis 的一个值得注意的结果，是在他分析地计算圆面积的努力中得到的，即 π 的新的表达式. 他计算由坐标轴，x 点的纵坐标和函数

$$y=(1-x^2)^0,\ y=(1-x^2)^1,\ y=(1-x^2)^2,\ y=(1-x^2)^3,\ \cdots$$

的曲线围成的面积，得到的结果分别是

$$x,\ x-\frac{1}{3}x^3,\ x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5,\ x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7,\ \cdots,$$

当 $x=1$ 时这些面积是

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{8}{15},\ \frac{48}{105},\ \cdots. \tag{4}$$

而圆却是由 $y=(1-x^2)^{1/2}$ 给出的. 应用归纳法和插值法，Wallis 算出它的面积，并通过更复杂的推理得到

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}.$$

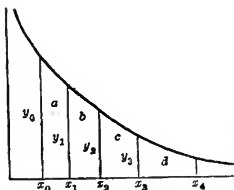


图 17.11

圣·文森特 (St. Vincent) 的 Gregory 在他的《几何著作》(*Opus Geometricum*, 1647) 中给直角双曲线和对数函数之间的重要联系提供了根据. 他用穷竭法证明：对于曲线 $y=1/x$ (图 17.11)，如果 x_i 选择得使面积 $a, b, c, d, \cdots$ 相等，则 y_i 便构成几何数列. 这意味着从 x_0 到 x_i 的面积之和(这些和构成算术数列)，是与 y_i 值的对数成比例的，这可用我们的符号写为

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}=k\log y.$$

因为 $y=\frac{1}{x}$，所以这和我们熟悉的积分结果是一致的. 第一个注意到面积能解释成对数的人是 Gregory 的学生，比利时耶稣会会

员 Alfons A. de Sarasa(1618～1667), 这个解释见于他的书«关于 Mersenne 的命题的问题的解答»(*Solutio Problematis a Mersenno Propositi*, 1649). 1665 年左右 Newton 也注意到双曲线下的面积与对数之间的关系, 并将这个关系写在他的«流数法»中 他用二项式定理展开 $1/(1+x)$, 并逐项积分, 得到

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots.$$

Nicholas Mercator 用 Gregory 的结果, 在他的 1668 年的«对数技术»(*Logarithmotechnia*)中, 独立地给出了同样的级数(但没有明显地叙述出来). 其他的人不久发现了(按照我们的说法)收敛得更快的级数. 关于抛物线的求积以及它和对数函数的联系这一工作是由许多人做的, 而且有很多是在通信中交流的, 因此很难查出谁是最先发现的人.

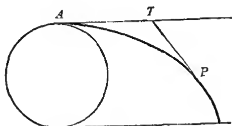


图 17.12

直到 1650 年还无人相信一曲线的长度能完全等于某直线长度. 实际上, 在«几何»第二册中, Descartes 说在曲线和直线之间的关系是未知的或者是永不可知的. 但是 Roberval 求出了摆线的一个拱的长度. 建筑师 Christopher Wren(1632～1723) 由证明弧 $PA=2PT$ 而算出摆线的长度(图17.12)[6]. William Neile(1637～1670)也得到(1659)一个拱的长度, 他还用 Wallis 的提示, 算出了半立方抛物线($y^3=ax^2$)的长度[7]. Fermat 也计算了一些曲线的长度. 这些人一般是用内接多边形去逼近曲线的, 先求出各边的和, 然后随着每条边长的缩小而使边数成为无穷大. 圣·安柱斯 (St. Andrews) 大学和爱丁堡

(6) 这个方法由 Wallis 在«续论»(*Tractatus Duo*, 1659=*Opera*, 1, 550～569)中公布. Wren 只是给出了结果.

(7) Neile 的工作由 Wallis 在脚注 6 引证的书中发表.

(Edinburgh)大学的教授 James Gregory (1638～1675，对他的工作，他的同时代人略有所知，直到 H. W. Turnbull 编辑的纪念册于 1939 年出版后，才一般地被人知道)，在他的《几何的通用部分》(*Geometriae Pars Universalis*, 1668)中给出了计算曲线长度的方法.

关于计算曲线长度的更进一步的结果是 Christian Huygens (1629～1695) 得到的. 实际上，他给出了蔓叶线的弧长. 他还对面积和体积的工作作出贡献，而且是第一个得到除了球以外的表面积的结果的. 例如，他得到抛物面和双曲面的一部分表面的面积. Huygens 用纯几何的方法得到所有这些结果，不过，也和 Archimedes 一样，他有时用算术得到数量的解答.

计算椭圆的长度难住了数学家们. 事实上，James Gregory 声称椭圆和双曲线的长度不能用已知函数表出. 有一段时期数学家们对这问题的进一步工作失望了，直到下一世纪才得到新的结果.

我们讨论了 Newton 和 Leibniz 的前驱者对于推动微积分工作的四个主要问题所作的主要贡献. 当时认为这四个问题是不同的；但也注意到，甚至于利用了它们之间的联系. 例如 Fermat 就是用同样的方法求函数的最大值和曲线的切线. 另外，那时也已看出函数对于自变量的变化率问题与切线问题是同一问题. 实际上，Fermat 和 Barrow 的求切线的方法，仅仅是求变化率的几何副本. 但是，微积分的主要特征——仅次于导数的概念以及积分作为和的极限的概念——是积分可以由微分的逆过程求得，或者说，求反导数. 这一关系的很多迹象早已遇到过，但是它的意义却没有人体会到. Torricelli 在特殊的例子中看到了变化率问题本质上是面积问题的反问题. 事实上，这包含在 Galileo 所用的事实中：在速度-时间的图形下的面积就是距离. 因为距离的变化率必定是速度，所以如果把面积看作是"和"，它的变化率必定是面积函数的导数. 但是 Torricelli 没有看到普遍的情况. Fermat 同样也只

在特殊的例子中知道了面积和导数间的关系，没有体会到它的一般性或重要性. James Gregory 在他的 1668 年的《几何的通用部分》中证明切线问题是面积问题的逆问题，但是他的书未引起注意. 在《几何讲义》中，Barrow 有了求曲线的切线问题和面积问题之间的关系，但它是几何形式的，而且他本人也没有认识到它的重要性.

实际上在 Newton 和 Leibniz 作出他们的冲刺之前，微积分的大量知识已经积累起来了. 甚至在 Barrow 的一本书里，就能看到求切线的方法，两个函数的积和商的微分定理，x 的幂的微分，求曲线的长度，定积分中的变量代换，甚至还有隐函数的微分定理. 虽然在 Barrow 那儿，几何的表达使得普遍思想难于辨识，但在 Wallis 的《无穷的算术》中，可与之相比较的结果，是用代数的形式表达的.

人们于是惊问，在主要的新结果方面，还有什么有待于发现呢？问题的回答是方法的较大的普遍性以及在特殊问题里已建立起来的东西中认识其普遍性. 这世纪的前三分之二的时间内，微积分的工作沉没在细节里. 另外，许多人在通过几何来获得严密性的努力中，没有去利用或者探索新的代数和坐标几何中蕴含的东西，作用不大的细微末节的推理使他们精疲力竭了. 最终能培育出必要洞察力和高度概括力的是 Fermat，圣·文森特的 Gregory 和 Wallis 的算术工作，而 Hobbes 批评他们用符号替代几何. James Gregory 在《几何的通用部分》的序言中说，数学的真正划分不是分成几何和算术，而是分成普遍的和特殊的. 这普遍的东西是由两个包罗万象的思想家，Newton 和 Leibniz 提供的.

3. Newton 的工作

数学和科学中的巨大进展，几乎总是建立在几百年中作出一

点一滴贡献的许多人的工作之上的. 需要有一个人来走那最高和最后的一步, 这个人要能足够敏锐地从纷乱的猜测和说明中清理出前人的有价值的想法, 有足够想象力地把这些碎片重新组织起来,并且足够大胆地制定一个宏伟的计划. 在微积分中,这个人就是 Isaac Newton.

Newton(1642～1727)生于英格兰乌尔斯托帕 (Woolsthorpe)的一个小村庄里,他的母亲在那里管理着丈夫遗留下来的农庄,他父亲是在他出生前两个月去世的. 他在低标准的地方学校中接受教育,而且是一个除了对机械设计有兴趣以外,没有特殊才华的青年人. 他考取了大学,但他的 Euclid 几何的答卷是有缺陷的. 1661年他进入剑桥大学的三一学院, 安静而没有阻力地学习着. 有一次, 他几乎要改变方向, 从学自然哲学(即科学)转到学法律. 显然, 可能除了 Barrow 以外, 他从他的老师那里得到了很少一点鼓舞,他自己做实验并且研究 Descartes 的«几何», 以及 Copernicus, Kepler, Galileo, Wallis 和 Barrow 的著作.

Newton 刚结束了他的大学课程,学校就因为伦敦地区鼠疫流行而关闭. 他离开剑桥, 在安静的乌尔斯托帕的家乡度过了1665年和1666年. 在那里开始了他在机械、数学和光学上的伟大工作. 这时他意识到引力的平方反比定律——这个概念早已有人提出过,包括 Kepler 在内,可以回溯到1612年——这是打开那无所不包的力学科学的钥匙. 他获得了解决微积分问题的一般方法; 并且通过光学的实验,他作出了划时代的发现,即象太阳光那样的白光,实际上是从紫到红的各种颜色光混合而成的. “所有这些”, Newton 后来说:“是在1665和1666两个鼠疫年中做的,因为在这些日子里, 我正处在发现力最盛的时期, 而且对于数学和哲学(自然哲学)的关心,比其他任何时候都多.”

关于这些发现, Newton 什么也没有说过. 1667年他回到剑桥获得硕士学位, 并被选为三一学院的研究员. 1669年 Isaac

Barrow 辞去他的教授席位，Newton 被委任接替 Barrow，担任 Lucas 数学教授. 显然，他不是一个成功的教员，因为听他的课的学生很少；他提出的独创性的材料没有受到同事们的注意. 只有 Barrow，稍后一些还有天文学家 Edmond Halley (1656～1742)，认识到他的伟大，并给他以鼓励.

起初 Newton 并没有公布他的发现. 人们说他有一种变态的害怕批评的心理. De Morgan 说是"一种病态的害怕别人反对的心理统治了他的一生." 1672 年他确也发表了他的光学论文并附带发表了他的自然哲学思想的作品，遭到了同时代大多数人的严厉批评，包括 Robert Hooke 和 Huygens 在内，他们对于光的本性持有不同的看法. Newton 吃了一惊，决心以后再不发表了. 但是 1675 年他又发表了另一篇光学论文，其中包括光是质点流的想法——光的粒子学说. 他再一次遭到了暴风雨般的批评，甚至有人声称他们已经发现了这些思想. 这次 Newton 决心死后才公开他的成果. 然而，他还是发表了后来的论文及几本著名的书：«原理»，«光学» (*Opticks*, 1704 年英文版，1706 年拉丁文版) 和«普遍的算术» (1707).

从 1665 年起他把引力定律应用于行星的运动；在这方面，Hooke 和 Huygens 的著作极大地影响了他. 1684 年他的朋友 Halley 力劝他发表已得的成果，但是除了因为不愿意外，Newton 还没有证明：一个实心球体所作用的引力恰好等于球心处一个质点所产生的引力，这个质点上集中了球的全部质量. 1686 年 6 月 20 日在给 Halley 的信中他说，直到 1685 年他仍然怀疑这是错的. 在这一年中他证明了：一个实心球，它的密度随着到球心的距离而变化，在吸引一个外部质点时，实际上就好象球的质量集中在它的中心一样，并且同意了写出他的著作.

这时 Halley 协助 Newton 编辑并且出资付印. 1687 年«自然哲学的数学原理» (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)

第一版出版了. 以后的两个版本是1713年和1726年, 第二版包括了一些改进. 虽然这本书给Newton带来巨大的名望, 但它很难懂. 他告诉朋友说, 他有意使它难懂, "目的是为了避免遭到数学知识浅薄的人的抑制." 毫无疑问, 他希望这样可以避免他早期的光学论文所曾遭到的批评.

Newton也是一个大化学家. 虽然在这个领域里没有什么大的发现联系到他的工作, 但是必须记住, 那时化学正处在婴儿时期. 他有试图用最终的微粒解释化学现象的正确想法, 而且还有广博的实验化学知识. 在这门学科中, 他写了一篇重要论文"酸的性质"(写于1692年, 发表于1710年). 在1701年的皇家学会哲学汇刊上他发表了一篇关于热的论文, 其中包括他的著名的冷却定律. 虽然他读了炼金术士的书, 但并没有接受他们模糊的和神秘的观点. 他相信, 物体的物理性质和化学性质, 可以用最终的微粒的大小、形状和运动来说明. 他排除了炼金术士的神秘的力, 诸如: 同情, 厌恶, 和谐、诱惑等等.

除了天体力学、光学和化学的工作以外, Newton还研究了流体静力学和流体动力学. 在他的超等的光学实验工作之后, 他又实验了钟摆运动在各种介质中的衰减, 以及做了球在空气和水中下落、水从喷嘴里喷出的实验. 他和当时的大多数人一样, 自己制造实验装置. 他造了两个反射望远镜, 甚至于制造出做架子用的合金, 浇铸框架, 做底座, 磨光镜头.

在当了三十五年教授之后, Newton成为沮丧的、痛苦的神经衰竭者. 他决定放弃研究, 并于1695年接受任命, 担任伦敦的不列颠造币厂监察. 在造币厂的二十七年中, 除了关于个别问题的工作以外, 他没有进行研究. 1703年他成为皇家学会会长, 一直到逝世; 1705年他被授予爵士的称号.

很明显, Newton对于科学的兴趣要比对于数学的兴趣大得多, 而且还是一个研究当代问题的积极参加者. 他认为, 他的科学

工作的主要价值在于它支持天启教(即由上帝直接启示于人的宗教——译者). 他虽然不是牧师, 但实际上他是一个博学的神学家. 他认为科学研究虽然是艰苦而又枯燥的, 但要坚持, 因为它给上帝的创造提出证据. 象他的前辈 Barrow 一样, 晚年 Newton 转向神学的研究. 在«修改的古代王国年表» (*The Chronology of Ancient Kingdoms Amended*) 中, 他想把圣经和宗教文件上记载的事件和天文事件联系起来, 从而精确地注明这些事件的日子. 他的主要宗教著作是«对于 Daniel 的预言和 St. John 的启示录的观察» (*Observations Upon the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St. John*). 圣经的注释是对宗教作理性探讨的一个方面, 这种探讨在理性时代是很流行的; Leibniz 也参加了这种探讨.

关于微积分, Newton 总结了已经由许多人发展了的思想, 建立起成熟的方法, 并且提出了前面叙述的几个主要问题之间的内在联系. 虽然他在学生时期向 Barrow 学了很多, 但在代数和微积分方面, 他更受 Wallis 的影响. 他说«无穷的算术»引导他在分析中有所发现; 确实, 在他的微积分著作中, 他是通过分析的思想前进的. 但是, 甚至 Newton 也认为, 对于严密的证明, 几何是必需的.

1669 年 Newton 在他的朋友中散发了题为«运用无穷多项方程的分析学» (*De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas*) 的小册子; 这本书直到 1711 年才出版. 他假定有一条曲线而且曲线下的面积 z (图 17.13) 已知是

(5) $$z=ax^{m},$$

其中 m 是整数或者分数. 他把 x 的无限小的增量叫做 x 的瞬 (moment), 并用 o 表示, 这是 James Gregory 用的符号, 相当于 Fermat 的符号 E. 由曲线、x 轴、y 轴

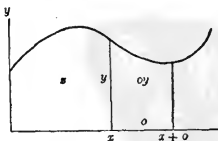


图 17.13

和$x+o$处的纵坐标围成的面积，他用$z+oy$表示，其中oy是面积的瞬．那么，

$$z+oy=a(x+o)^m. \tag{6}$$

运用二项式定理于右边，当m是分数时，得到一个无穷级数，从(6)减去(5)，用o除方程的两边，略去仍然含有o的项，就得到

$$y=max^{m-1}.$$

因此，用我们的话来讲就是，面积在任意x点的变化率是曲线在x处的y值．反过来，如果曲线是$y=max^{m-1}$，那么，在它下面的面积就是$z=ax^m$.

在这里，Newton 不仅给出了求一个变量对于另一个变量(在上面的例子中是z对x)的瞬时变化率的普遍方法，而且证明了面积可以由求变化率的逆过程得到．因为面积也是用无穷小面积的和来表示从而获得的，所以 Newton 证明了这样的和能由求变化率的逆过程得到．和(更精确些说，和的极限)能够由反微分得到，这个事实就是我们现在所叫的微积分基本定理．虽然 Newton 的前驱者在特殊的例子中知道了并且也模糊地预见到了这个事实，但是 Newton 看出它是普遍的．他应用这个方法得到了许多曲线下的面积，并且解决了其他能够表成和式的问题．

在证明了面积的导数是y值，并断言逆程序是正确的以后，Newton 给出了法则：如果y值是若干项的和，那么面积就是由每一项得到的面积的和．用现在的话来说，就是函数之和的不定积分是各个函数的积分之和．

他在这篇专题文章中的又一个贡献，是更进一步运用他的无穷级数．为了积分$y=a^2/(b+x)$，他用$b+x$除a^2得到

$$y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}+\cdots.$$

他把这个无穷级数逐项积分，求出了面积

$$\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}+\cdots.$$

对于这个无穷级数，他说，只要 b 是 x 的倍数，对于任何用途，取最初几项就足够了.

同样地，为了积分 $y=1/(1+x^2)$，他用二项式展开，写成

$$y=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\cdots$$

并且逐项积分. 他注意到，如果把 y 取成 $1/(x^2+1)$ 的话，那么，由二项式展开将得到

$$y=x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}+\cdots,$$

而且现在也能逐项积分. 随后他说，当 x 相当小时，应该用第一个展开式；但当 x 大时，必须用第二个展开式. 因此他稍微有些意识到我们现在叫做收敛性的重要，但是还没有关于它的明确概念.

Newton 意识到他已经把逐项积分扩展到用于无穷级数，但在《分析学》中，他说：

> 任何事情，只要是普通分析能够通过有限多项的方程去做的，也能够通过无限多项的方程去做，这就使我没有问题地把这后一种也叫做分析. 因为后一种推理的正确性不少于前一种，后一种方程的正确性也不少于前一种；不过，我们这些凡人的推理力量，是局限在狭窄的范围内的，所以既不能表达出，也无法去想象方程的一切项，使得能够从中确知所求的量.

到此为止，Newton 对微积分的探讨，用了可以说是无穷小的方法. 瞬是无限小的量，不可分的量，或者是微元. 当然 Newton 这样做在逻辑上是不清楚的. 在这本书中他说他的方法"与其说是精确的证明，不如说是简短的说明."

在写于 1671 年但直到 1736 年才出版的书《流数法和无穷级数》(*Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*)中，Newton

给他的思想作出了第二种更广泛而且更明确的说明. 在这本书中，他说他认为变量是由点、线和面的连续运动产生的，而不是他在早期论文中所说的无穷小元素的静止的集合. 他现在把变量叫做流(fluent)，变量的变化率叫做流数(fluxion). 对于流 x 和 y 的流数，他记为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$. $\dot{x}$ 的流数是 $\ddot{x}$ 等等. 流数为 x 的流是 $\acute{x}$，后者的流是 $\acute{\acute{x}}$.

在这第二本书中，Newton 更清楚地陈述了微积分的基本问题：已知两个流之间的关系，求它们的流数之间的关系，以及它的逆问题. 由已知关系给定的两个变量，能够表示任何量. 但是 Newton 认为它们是随时间变化的，因为这是一种有用的，虽然不是必须的思想方法. 因为如果 o 是"无穷小的时间间隔"，那末 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 就是 x 和 y 的无穷小增量，或者说是 x 和 y 的瞬. 例如，假定流是 $y=x^n$，为着求出 $\dot{y}$ 和 $\dot{x}$ 之间的联系，Newton 首先建立

$$y+\dot{y}o=(x+\dot{x}o)^n,$$

然后按早期论文中说的那样去做. 他用二项式定理展开右边，消去 $y=x^n$，用 o 除两边，略去所有仍然含有 o 的项，得到

$$\dot{y}=nx^{n-1}\dot{x}.$$

用现在的记号，这个结果可以写成

$$\frac{dy}{dt}=nx^{x-1}\frac{dx}{dt},$$

而且因为 $dy/dx=(dy/dt)/(dx/dt)$，所以 Newton 在求出 dy/dt 对 dx/dt，或者说 $\dot{y}$ 对 $\dot{x}$ 的比中，已经求出了 dy/dx.

流数法同«分析»中使用的方法并无本质区别，也没有任何好一点的严密性；Newton 扔掉 $\dot{x}\dot{x}o$ 和 $\dot{x}\dot{x}o\dot{x}o$(他写成 $\dot{x}^3oo$)那样的项，根据是它们同剩余下来的项相比是无穷小. 但是，他在«流数法»中的观点毕竟是有些不同了. 瞬 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 是随时间 o 变化的，而在第一篇论文中的瞬是 x 和 z 的最后的固定的一小片. 这个新观点是遵循着 Galileo 的更富有动力学思想的想法；而旧的观点是运

用 Cavalieri 的静力学不可分法. 正如 Newton 指出的, 这个改动只是为了从不可分法的学说中排除生涩; 但是, 瞬 $\dot{x}o$ 和 $\dot{y}o$ 仍然是某种无穷小量. 另外, x 和 y 的对于时间的流数或者导数 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 从来没有真正定义过; 这个中心问题是避开了的.

已知 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ 之间的关系, 要求出 x 和 y 之间的关系, 比之仅仅积分 x 的函数更困难些. Newton 处理了几种类型的问题: (1) 有 $\dot{x}$、$\dot{y}$, 还有 x 或 y 出现; (2)有 $\dot{x}$、$\dot{y}$、x 和 y 出现; (3)有 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 和它们的流量出现. 第一类是最简单的, 在现在的记法中, 要求解 $dy/dx=f(x)$. 在第二类中, Newton 处理了 $\dot{y}/\dot{x}=1-3x+y+x^2+xy$, 而且是用逐步逼近法去解的. 他从 $\dot{y}/\dot{x}=1-3x+x^2$ 作为第一近似出发, 得到作为 x 的函数的 y, 将这个 y 值代入原等式的右边, 并继续这一手续. Newton 叙述了他的做法, 但没有证明. 在第三类中, 他解了 $2\dot{x}-\dot{z}+\dot{y}x=0$. 他假定了 x 和 y 之间的一个关系式, 比如说, $x=y^2$, 于是 $\dot{x}=2\dot{y}y$. 这样, 方程就成为 $4\dot{y}y-\dot{z}-\dot{y}y^2=0$, 从此得到 $2y^2+(y^3/3)=z$. 所以, 如果把第三种类型认为是偏微分方程, 那么 Newton 只得到了一个特殊积分.

Newton 意识到在这篇论文中他已提出了一个普遍的方法. 他在 1672 年 10 月 10 日的写给 John Collins 的信中, 给出了他的方法的真相和一个例子, 他说,

> 这是普遍方法的一个特殊方法, 或者更确切地, 一个推理, 它本身, 用不着任何麻烦的计算, 不仅可以用来作出任何曲线的切线(不管这曲线是几何的还是机械的), 而且还可以用来解出其他关于曲度, 面积, 曲线的长度, 重心等深奥问题; 它的应用并不限于没有无理根的方程. 通过把方程化为无穷级数, 我把这个方法和在方程中起作用的其他方法紧密结合起来.

Newton 强调无穷级数的用处, 因为用它能处理象$(1+x)^{3/2}$一类

的函数,相反,他的前人却完全限制在有理代数函数方面.

在写于1676年,发表于1704年的第三篇微积分论文《求曲边形的面积》(*Tractatus de Quadratura Curvarum*)中, Newton 说他已放弃了微元或无穷小量. 他现在批评扔掉含 o 项的做法, 因为他说,

> 在数学中,最微小的误差也不能忽略……. 在这里,我认为数学的量并不是由非常小的部分组成的, 而是用连续的运动来描述的. 直线不是一部分一部分的连接, 而是由点的连续运动画出的,因而是这样生成的;面是由线的运动, 体是由面的运动, 角是由边的旋转, 时间段落是由连续的流动生成的. ……
>
> 随我们的意愿, 流数可以任意地接近于在尽可能小的等间隔时段中产生的流量的增量,精确地说,它们是最初增量的最初的比, 它们也能用和它们成比例的任何线段来表示.

这就是 Newton 的新概念: 最初和最后比的方法. 他考虑函数 $y=x^n$. 为了求出 y 或者 x^n 的流数, 设 x"由流动"成为 $x+o$. x^n 就成为

$$(x+o)^n=x^n+nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\cdots.$$

x 和 y 的增量的比,即 o 和 $nox^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}o^2x^{n-2}+\cdots$ 的比, 等于(都用 o 来除):

$$1 \text{ 和 } nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}ox^{n-2}+\cdots \text{ 的比.}$$

"现在设增量消失,它们的最后比就是"

$$1 \text{ 比 } nx^{n-1}.$$

因此 x 的流数和 x^n 的流数的比就等于1比 nx^{n-1}, 或者如我们今天说的, y 对于 x 的变化率是 nx^{n-1}. 这是最初增量的最初比.

当然，这种说法的逻辑性并不比前面的两种好；然而 Newton 说这个方法与古代的几何是融洽的而且没有必要引进无穷小量.

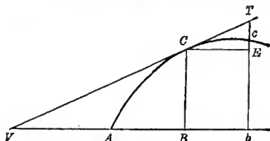


图 17.14

Newton 还给出了几何的解释. 在图 17.14 中，假定 bc 移向 BC，使得 c 和 C 重合. 那么曲边三角形 CEc 以"最后的形式"和三角形 CET 相似，因此，它的"消失的"各边将和 CE, ET 和 CT 成比例. 所以 AB、BC 和 AC 的流数，在它们的消失的增量的最后比中，和三角形 CET 或者三角形 VBC 的边成比例.

在《流数法》中，Newton 作了一些应用，用流数法微分隐函数，求曲线的切线，函数的最大值与最小值，曲线的曲率和曲线的拐点. 他也得到了曲线下的面积和曲线的长度. 关于曲率，他给出曲率半径的正确公式，即

$$r=\frac{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}},$$

其中 $\dot{x}$ 取作 1. 他还给出极坐标中的曲率半径的公式. 最后，他附了一个积分简表.

在写完微积分的基本论文以后，过了很长时间，Newton 才发表这些论文. 他的流数理论最早发表在 Wallis 的《代数》(*Algebra*, 1693 年，拉丁文第二版)中，Newton 写了书的第 390 至 396 页. 如果当初他写出来就发表的话，也许可以避免与 Leibniz 发生谁先发现的争论.

Newton 的第一本包括他的微积分的书是他的巨著《自然哲学的数学原理》[8]. 只要涉及到微积分的基本概念，即流数或者我们

(8) 第三版由 Andrew Motte 在 1729 年译成英文. 由 Florian Cajori 修订和编注的这一版，由加利福尼亚(California)大学出版社出版.

说的导数，Newton 就作出几种陈述，他舍弃了无穷小量或者最后的不可分量而用了"消失的可分量"，即能够无穷地缩小的量．在《原理》的第一版和第三版中，Newton 说："量在其中消失的最后比，严格说来，不是最后量的比，而是无限减少的这些量的比所趋近的极限，而它与这个极限之差虽然能比任何给出的差更小，但是在这些量无限缩小以前既不能越过也不能达到这个极限."[9] 这是他曾经给过的作为最后比的意思的最清楚的说明．关于前面的引文，他还说："最后速度的意思是：它既不是在物体达到最后位置(在该处假定物体停止)之前的速度，也不是在达到以后的速度，而是正达到的那瞬间的速度．……因此，同样的，就消失量的最后比来说，应理解为，不是在量消失以前，也不是在消失以后，而是正当它们消失时的比."

在《原理》中 Newton 用了几何的证明方法．然而在包含有他的未出版的著作的名叫"朴次茅斯论文集"(Portsmouth Papers)中，他用分析的方法找出了一些定理．这些论文说明，除了能归结到几何的以外，他也分析地获得了一些结果．他诉诸几何的一个原因是相信证明将更能被他的同时代人理解．另外一个原因是他非常赞赏 Huygens 的几何著作并希望和它并列．在这些几何证明中，Newton 用了微积分的基本的极限过程．因此，正如今天的微积分所做的那样，曲线下的面积本质上被认为是近似矩形的和的极限．但是，他用了这个概念去比较不同的曲线下的面积，而没有计算这样的面积．

他证明，当 AR 和 BR (图 17.15)垂直于弧 ACB 在 A 点和 B 点的切线时，弦 AB，弧 ACB 和 AD 这三个量中任意两个的最后比，当 B 接近于 A 并和 A 重合时，等于 1．因此他在书的第一卷的引理 2 的系 3 中说："因此在关于最后比的所有推论中，我们可以用这些线中的任意一个随意代替另一个."然后他证明，当 B

(9) 第三版，第 39 页．

图 17.15

图 17.16

接近并重合于 A 时，三角形 RAB, $RACB$, RAD 中任意两个的面积之比将等于 1. “因此，在关于最后比的所有推论中，我们可用这些三角形中的任意一个代替另一个.” 同样的，设 BD 和 CE(图 17.16)垂直于 AE(它不必是弧 ABC 在 A 点的切线). 当 B 和 C 接近 A 并和 A 重合时，ACE 和 ABD 的面积的最后比将等于 AE^2 和 AD^2 的最后比.

«原理»包含丰富的成果，其中的一些我们将要提到. 虽然这本书是研究天体力学的，但是对于数学史也有极大的重要性，这不仅因为 Newton 自己在微积分方面的工作，大部分是由他对书中处理的问题的压倒一切的兴趣激发的，而且还因为«原理»对许多问题提出了新的课题和研究方式，而这些问题经过下一个世纪的研究，产生出大量的分析成果.

«原理»分成三卷[10]. 在引言性章节中 Newton 定义了诸如惯量、动量和力等力学概念，然后叙述了三条著名的运动学公理或定律. 在他的书中是这样说的：

定律 I. 每一个物体保持它原来的静止状态或匀速直线运动状态不变，除非由作用于它的力迫使它改变这种状态.

---

(10) 所有的出处都是注(8)中提到的版本.

定律 II．运动的(量的)改变与施加的动力成正比，而且是朝着力所作用的直线方向改变．

Newton 所谓的动量，正如他先前曾说明过的，等于质量乘上速度．因此，如果质量是常数，那么动量的变化就是速度的变化，即加速度．当力的单位是磅达，质量的单位是磅，加速度的单位是英尺/秒^{2}时，第二定律现在通常写成 $F=ma$．Newton 第二定律实际上是矢量的叙述；这就是，如果力是由三个互相垂直的方向上的分力合成的，那么每一个分量在它自己的方向上引起一个加速度．Newton 在特殊的问题中用了力的矢量特性，但是定律的矢量本质的全部意义，首先是由 Euler 充分认识的．这个定律具体化了对 Aristotle 力学的关键性的改革，Aristotle 断言力引起速度．他还断言，力对于维持速度是必需的．定律 I 否定了这一点．

定律 III．每一个作用总是引起一个相等的反作用．

我们不去深考力学的历史，只是指出：前两个定律是先前由 Galileo 和 Descartes 发现并提出，而由 Newton 给以更明确和更概括的叙述的．在质量(即一个物体对于它在运动中的变化的抵抗)和重量(即作用在任何物体质量上的引力)之间的差别，也归功于这些人．力的矢量特性推广了 Galileo 的原则：抛射体的竖直方向和水平方向的运动能够分开来处理．

《原理》的第一卷以一些微积分的定理开始，包括上面引到的关于最后比的一些定理．然后讨论了中心力作用下的运动，这个力总是把运动物体引向一个固定点(实际上就是太阳)，并且证明了命题 1：在相等的时间内扫出相等的面积(这包含了 Kepler 的面积定律)．接着，Newton 考虑了一个沿着圆锥曲线运动的物体，并且证明(命题 11、12 和 13)：力必定是随着到某个定点的距离的平方的反比变化的．他还证明了逆定理，这包含 Kepler 的第一定律．在作了向心力的论述之后，他推出了 Kepler 第三定

律(命题 15). 接着的两节是研究圆锥曲线性质的. 主要的问题是构造满足五种已知条件的二次曲线，这些条件实际上是平常观察的数据. 这样，已知一个物体沿着圆锥曲线运动的时间，他求出了它的速度和位置. 他着手于拱点线(apse line)的运动，即连结(在一个焦点上的)引力的中心和沿着一条本身以某种速度绕焦点旋转的圆锥曲线移动的物体的最大或最小距离位置的直线. 第 10 节参考特殊的单摆运动来研究物体沿着表面的运动. 这里 Newton 给 Huygens 以应有的感谢. 联系到重力在运动中的加速作用，他研究了摆线、圆外旋轮线、四尖圆内旋轮线的几何性质，并给出圆外旋轮线的长度(命题 49).

第 11 节中 Newton 从运动定律和引力定律推断出两个物体的运动法则，这两个物体按照引力彼此吸引. 它们的运动归结为一个物体围绕着固定的第二个物体的运动. 这个运动的物体是沿着椭圆移动的.

然后他考虑均匀密度和变化密度的球体以及球型物体对一个质点的吸引力. 他给出一个几何证明(第 12 节命题 70)，证明一个薄的匀质球壳对它内部的质点没有吸引力. 因为这个结论对薄壳成立，所以对于这样的薄壳的和，即对于一定厚度的壳也成立. (他后来证明命题 91 系 3，对于均匀的椭球壳，即包含在同样放置的两个相似的椭球面之间的壳，这个结论也成立.)命题 71 证明一个薄的均匀球壳对外部质量的吸引力，等于球壳的质量集中在中心时产生的吸引力，所以球壳吸引外部质点的力是向着它的中心的，这个力与离开中心的距离的平方成反比. 命题 73 证明一个均匀的实心球体，吸引内部质点的力与质点离开球心的距离成比例. 至于球体对外部质点的吸引力，命题 74 证明它与球的质量集中在中心时产生的吸引力是相同的. 据此，如果两个球互相吸引，第一个球对第二个球的每一个质点的吸引力，就好象第一个球的质量集中在它的中心时产生的吸引力一样. 这样，第一个球

就成为被第二个球的离散质量吸引的质点；所以第二个球也可以当作质量集中在中心的一个质点．因此两个球都可以作为质量分别集中在中心的质点．所有这些由 Newton 首创的结论，都推广到密度是球对称的球体，以及不同于平方反比定律的其他引力定律．

接着，Newton 着手处理三体运动，这三体的每一个吸引其他两个，得到一些近似的结果．三体运动问题成为 Newton 以来的一个主要问题，至今还未解决．

«原理»的第二卷是研究物体在气体和液体那样的有阻力的介质中的运动，这是流体动力学的开端．Newton 在一些问题中假定介质的阻力与运动物体的速度成比例，在另一些问题中假定与运动物体速度的平方成比例．他考虑物体必须具有什么形状才能使它遇到的阻力最小(见第 24 章第 1 节)．他还考虑了钟摆和射弹在空气和液体中的运动．有一节是研究空气中的波动理论的(例如声波)，并且得到声音在空气中的速度公式．他还论述了水中的波的运动．Newton 接着描写他所做的一些实验，这些实验用来决定在流体中运动的物体所受到的阻力．一个主要的结论是：行星在真空中运动．在这本书中 Newton 完全打开了一个新的境界，但是流体运动的决定性工作还有待于完成．

第三卷的标题是«论世界的体系»(*On the System of the World*)，它将第一卷中建立的普遍理论应用于太阳系．它说明了太阳的质量怎样可以用地球的质量计算出来；并说明了任何有卫星的行星的质量也可以用同样的方法去求．他计算了地球的平均密度，发现它是在水的密度的 5～6 倍之间(今天的数值是 5.5)．

他证明地球不是一个真的球而是一个扁球，而且计算了扁平度．他的结论是扁球的椭率是 1/230(今天的数值是 1/297)．从观察到的任何一个行星的扁度，就可以算出它的日长．用扁平度的大小以及向心力，Newton 计算了地球的引力在地球表面上的

变化，从而求出物体的重量的变化．他证明扁球的引力与这扁球的质量集中在它的中心时的引力是不一样的．

然后他解释(分点)岁差．这个解释的依据是：地球不是球体而是沿着赤道凸出的．因此，在月球的引力作用下，地球的受力点实际上不是地球的中心，而是周期性地在地球的旋转轴上变动．这个变化的周期 Newton 计算出来是 26,000 年．这个值曾由 Hipparchus 从他所能得到的观察资料中推断出来过．

Newton 说明了潮汐的主要特征(第一卷的命题 66 和第三卷的命题 36 和 37)．月球是主要原因；太阳是第二位的原因．用太阳的质量他算出了太阳潮汐的高度．由观察大潮和小潮的高度(太阳和月球正连成一线或正相反时发生的潮汐)，他求出了太阳潮汐并估计了月球的质量．Newton 还作出一些近似办法来讨论太阳对月球绕地球运动的影响．他求出了月球在纬度和经度的运动；拱点线的运动(连接地球中心到月球的最大距离的线)；交点的运动(这些点是月球轨道与地球轨道平面的交点，这些点退行着，即背着月球自身运动的方向缓慢地移动)；出差(月球轨道偏心度的周期变化)；年方程(地球和太阳间距离的每天变化对月球运动的影响)；以及月球轨道平面与地球轨道平面的倾角的周期变化．月球运动的无规律性已知有七项，Newton 又发现了两项：远地点(拱点线)的不等性和交点的不等性．他的近似法只给出拱点线运动的一半．1752 年 Clairaut 改进了计算，并得到满 3° 的拱点线的旋转；然而，很晚以后，John Couch Adams 在 Newton 的论文中发现了正确的计算．最后，Newton 证明了彗星一定是在太阳的引力下运动的，因为在观察的基础上测定出它们的轨迹是圆锥曲线．正如我们在前一章中指出的，Newton 花了大量的时间于月球运动的问题，是因为这个知识对于改进求经度的方法是必需的．他工作得如此艰苦，以致他抱怨说，这个问题使得他头疼．

4. Leibniz 的工作

在建立微积分中和 Newton 并列在一起的是 Gottfried Wilhelm Leibniz(1646～1716)，虽然他的贡献是完全不同的. 他研究法律，在答辩了关于逻辑的论文之后，得到哲学学士学位. 1666 年他写了论文《论组合的艺术》(*De Arte Combinatoria*)[11]，这是一本关于一般推理方法的著作，这就完成了他在阿尔特道夫(Altdorf)大学的哲学博士论文并使他获得教授席位. 1670 和 1671 年, Leibniz 写了他的第一篇力学论文, 在 1671 年左右, 他制造出他的计算机. 他得到一件差使, 作为梅因兹(Mainz)选帝侯的大使在 1672 年三月政治出差到巴黎. 这次访问使他同数学家和科学家接触，其中值得注意的是 Huygens，激起了他对数学的兴趣. 虽然他在这门学科中作过一些阅读并写了 1666 年的论文, 但他说直到 1672 年他还基本上不懂数学. 1673 年他到伦敦，遇到另外一些科学家和数学家，包括当时的伦敦皇家学会秘书 Henry Oldenburg. 虽然他靠做外交官生活，但却更深入地钻研了数学，研究了 Descartes 和 Pascal. 1676 年他被任命为汉诺威(Hanover)选帝侯的图书馆管理员和顾问. 24 年后勃兰登堡 (Brandenburg)的选帝侯邀请 Leibniz 在柏林为他工作. 尽管 Leibniz 卷入了各种政治活动, 其中包括 George Ludwig 继承英国王位的活动, 但他的工作领域是广泛的，他的业余活动的范围是庞大的. 1716 年他无声无息地死去.

除了是外交官外，Leibniz 还是哲学家、法学家、历史学家、语言学家和先驱的地质学家，他在逻辑学、力学、光学、数学、流体静力学、气体学、航海学和计算机方面做了重要的工作. 虽然他的教授席位是法学的，但是他在数学和哲学方面的著作列于世界上曾

(11) 1690 年发表于《哲学论文》(*Die philosophische Schriften*), 4, 27～102.

产生过的最优秀的著作之中. 他用通信保持和人们接触，最远的到锡兰(Ceylon)和中国. 他无休止地想调和旧教和新教的信仰. 正是他，在 1669 年提议建立德国科学院；1700 年柏林科学院终于组织起来了. 他原来的意见，是要成立一个学会，从事于对人类有益的力学中的发明和化学、生理学方面的发现. Leibniz 要求知识是应用的. 他把大学称作“僧院”，指责他们拥有知识而没有判断，并且专门注意小事情. 相反地，他力劝追求真正的知识——数学、物理、地理、化学、解剖学、植物学、动物学和历史. 在 Leibniz 看来，手工艺人和实践者的技能比专门学者的深奥的细微末节要有价值. 他认为德文优于拉丁文，因为拉丁文联系于古老的无用的思想. 他说，人们用拉丁文来吸引别人的注意，而掩饰他们自己的无知. 相反，德语是一般人都理解的，而且经过发展，能够帮助思想的清晰和说理的锐利.

Leibniz 从 1684 年起发表微积分论文，以后我们将更多地谈到它们. 然而，他的许多成果，以及他的思想的发展，都包含在他从 1673 年起写的、但他自已从未发表过的成百页的笔记本中. 这些笔记，人们也许能预料到，从一个课题跳到另一个课题，并且随着他思想的发展而改变他所用的记号. 有些是在他研究圣文森特的 Gregory, Fermat, Pascal, Descartes 和 Barrow 的书或文章时，或是试图把他们的思想纳入他自己处理微积分的方式时所出现的简单思想. 1714 年 Leibniz 写了《微分学的历史和起源》(*Historia et Origo Calculi Differentialis*)，在这本书中，他给出一些关于他自己思想发展的记载. 但是，这是在他的工作做了以后许多年才写的，而且由于人的记忆力的衰减和他在此时获得的巨大洞察力，他的历史可能不是精确的. 又因为他的目的是针对当时加于他的剽窃的罪名而保卫自己，所以他可能不自觉地歪曲了关于他的思想来源的记载.

不管 Leibniz 的笔记怎么混乱，我们将仔细检查几篇，因为它

们揭示了一个最伟大的才智，怎样为了达到理解和创造而奋斗. 1673年左右，他看到求曲线的切线的正问题和反问题的重要性；他也完全相信，反方法等价于通过求和来求面积和体积. 他的思想的一些较为系统的发展开始于1675年的笔记. 然而，谈一谈他在《论组合的艺术》中所考虑的数的序列、第一阶差、第二阶差以及高阶差，对于了解他的思想是有帮助的. 例如，对于平方的序列

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,$$

第一阶差是

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,$$

第二阶差是

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2.$$

Leibniz注意到自然数列的第二阶差消失以及平方序列的第三阶差消失等等. 当然，他还观察到，如果原来的序列是从0开始的，那么第一阶差的和就是序列的最后一项.

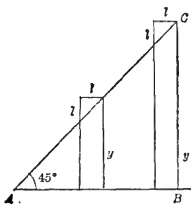


图 17.17

要把这些事实和微积分联系起来，他必须把序列看作是函数的 y 值，而把任何两项的差看作是邻近两个 y 值的差. 最初他认为 x 表示序列中的项的次序，y 表示这一项的值.

量 dx，他经常写作 a，这时候等于1，因为它是两个相连的项的序数之差，dy 是两个相连项的值的实际的差. 然后用omn.，即拉丁文omnia的缩写，表示和，并用 l 代替 dy，Leibniz断言 $\text{omn.}l=y$，因为omn. l 是首项为0的序列的第一阶差的和，这样就给出了最后一项. 但是，omn. yl 产生一个新问题. Leibniz获得 $\text{omn.}\ yl=\frac{y^2}{2}$ 的结论是在 $y=x$ 的条件下考虑的. 因此，如图17.17所示，三角形 ABC 的面积是 yl

的和(对于"很小"的 l 来说),它也是 $\frac{y^2}{2}$. Leibniz 说:"从 0 起增长的直线,每一个用与它相应的增长的元素相乘,组成三角形."这几点事实,和一些较复杂的东西,已经出现在 1673 年的论文中.

下一阶段中,他和几个困难作斗争. 他必须从一串离散的值过渡到 dy 和 dx 是 x 的任意函数 y 的增量的情况. 因为他仍然局限于数列,而在数列中 x 是项的顺序,所以他的 a 或 dx 是 1; 因此他自由地插入或者去掉 a. 当他过渡到任意函数的 dy 和 dx 时,这个 a 就不再是 1 了. 但是,当他仍然与和的概念作斗争时,他忽略了这个事实.

因此在 1675 年 10 月 29 日的手稿中, Leibniz 从

$$\text{(7)}\qquad \text{omn.}yl=\overline{\text{omn.}\overline{\text{omn.}l}\frac{l}{a}}$$

出发,因为 y 本身就是 omn. l, 所以(7)是成立的. 他用 a 除 l 保持量纲. Leibniz 说, 无论 l 等于什么,(7)是成立的. 但是, 我们已经在图 17.17 中看到:

$$\text{(8)}\qquad \text{omn.}\,yl=\frac{y^2}{2}.$$

所以,由(7)和(8)得

$$\text{(9)}\qquad \frac{y^2}{2}=\overline{\text{omn.}\overline{\text{omn.}l}\frac{l}{a}}.$$

用我们的记号来写,就是

$$\frac{y^2}{2}=\int\left\{\int dy\right\}\frac{dy}{dx}=\int y\frac{dy}{dx}.$$

Leibniz 说,这个结论是值得称赞的.

Leibniz 从几何的论据中得来的另一个同类型的定理是

$$\text{(10)}\qquad \text{omn.}\,xl=x\,\text{omn.}\,l-\text{omn.omn.}\,l,$$

其中 l 是一个序列中相连两项的差, x 是项数. 对于我们,这个方程就是

$$\int x\,dy = xy - \int y\,dx.$$

Leibniz 又假定(10)中的 l 本身是 x, 就得到

$$\text{omn}.x^2 = x\,\text{omn}.x - \text{omn}.\text{omn}.x.$$

他说,但是 omn. x 是 $\frac{x^2}{2}$ $\left(\text{他已证明了 omn}.yl = \frac{y^2}{2}\right)$, 所以

$$\text{omn}.x^2 = x\frac{x^2}{2} - \text{omn}.\frac{x^2}{2}.$$

由移置最后一项,他得到

$$\text{omn}.x^2 = \frac{x^3}{3}.$$

在 1675 年 10 月 29 日的手稿中, Leibniz 决定用 $\int$ 代替 omn.; 因此

$$\int l = \text{omn}.\, l, \qquad \int x = \frac{x^2}{2}.$$

记号 $\int$ 是"sum"(和)的第一个字母 S 的拉长.

可能是由于研究 Barrow 的著作的关系, Leibniz 很早就意识到, 微分与积分(看作是和)必定是相反的过程; 所以面积被微分时, 必定给出长度. 因此, 在 10 月 29 日的同一篇手稿中, 他说: "已知 l 及它与 x 的关系, 求 $\int l$. "然后, 他说: "假定 $\int l = ya$. 设 $l = ya/d$. [这里他把 d 放在分母中. 如果他写成 $l = d(ya)$, 那对我们就会有更好的理解.]那么正如 $\int$ 将增加维数那样, d 将减少维数. 但是 $\int$ 意味着和, d 意味着差. 从已知的 y 我们总能求出 y/d 或者 l, 即 y 的微差. 因此一个方程能变到另一个方程; 正如从方程

$$\overline{\int c \int \overline{l^2}} = \frac{c \int \overline{l^3}}{3a^3},$$

我们得到方程

$$c\int\overline{l^2}=\frac{c\int\overline{l^3}}{3a^3d}$$

一样."

在这篇早期论文中，Leibniz似乎是在探索$\int$的运算和d的运算，并看出它们是相反的. 最后他意识到$\int$不提高维数，d也不降低维数，因为$\int$实际上是矩形的和，因而是面积的和. 所以他承认，要从y回到dy，必须做出y的微差或者取y的微分. 然后他说："但是$\int$意味着和，d意味着差." 这可能是后来加进去的. 因此两个星期以后，为了从y得到dy，他从用d除改成作y的微差，并写作dy.

在此之前，Leibniz还认为y值是序列的项的值，x通常作为这些项的序数. 但是现在，在这篇论文中他说："所有这些定理对于那些级数是正确的，在这些级数中项的差和项本身间之比小于任意指定的量." 这就是说，dy/y可以小于任意指定的量.

在注着1675年11月11日，标题为«切线的反方法的例子»的手稿中，Leibniz用$\int$表示和，x/d表示差. 然后他说，x/d是dx，是两个相邻的x值的差，但是显然这里的dx是常数，并且等于1.

根据上面的勉强可以理解的议论，Leibniz断定一个事实：*作为求和的过程的积分是微分的逆*. 这个想法已出现在Barrow和Newton的著作中，他们用反微分求得面积. 但Leibniz是第一次表达出求和与微分之间的关系. 除了这个直率的断言以外，他并不清楚怎样可以从这样一个粗糙的式子$\sum y\,dx$去得到面积——即怎样从一组矩形得到曲线下的面积. 当然，这个困难困扰了十七世纪所有的数学家. 由于没有清楚的极限概念，或者甚至没有

清楚的面积概念，Leibniz 有时认为后者是非常小而又非常多的矩形的和，因而这个和与曲线下的真正的面积之差是可以忽略的；他有时又认为面积是纵坐标 y 的和．这后一个面积概念是普通的，尤其是在不可分量论者中，他们认为面积的最终单元与 y 值是同样的．

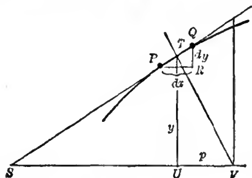


图 17.18

谈到微分，即使承认了 dy 和 dx 能是任意小的量之后，Leibniz 仍然必须克服 dy/dx 不完全是我们意义中的导数这个基本困难．他在 Pascal 和 Barrow 曾用过的特征三角形上建立他的理论．这个三角形(图 17.18)由 dy、dx 和弦 PQ 组成，Leibniz 还认为弦 PQ 是"P 和 Q 之间的曲线，而且是 T 点的切线的一部分"．虽然说这个三角形是无穷小的，但他坚持它和确定的三角形是相似的，即相似于由次切线 SU，T 点的纵坐标以及切线 ST 组成的三角形 STU．因此，dy 和 dx 是最终的元素，它们的比有确定的意义．事实上，他用三角形 PRQ 和 SUT 相似的论据得到 $dy/dx=TU/SU$．

在1675年11月11日的手稿中，Leibniz 说明他怎样能解答一个确定的问题．他寻求次法线与纵坐标成反比的曲线．在图 17.18 中，法线是 TV，次法线是 UV．由三角形 PRQ 和 TUV 的相似性，他得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}$$

或者

$$p\,dx=y\,dy.$$

但是曲线有已知的性质

$$p=\frac{b}{y},$$

其中 b 是比例常数. 因此

$$dx=\frac{y^2}{b}dy.$$

所以

$$\int dx=\int\frac{y^2}{b}dy,$$

即

$$x=\frac{y^3}{3b}.$$

Leibniz 还解决了其他的反切线问题.

在 1676 年 6 月 26 日的手稿中, 他意识到求切线的最好方法是求 dy/dx, 其中 dy 和 dx 是差, dy/dx 是商. 他忽略 $dx\cdot dx$ 和 dx 的高次幂.

1676 年 11 月左右, 他能够给出一般法则 $dx^n=nx^{n-1}dx$ 和 $\int x^n=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, 其中 n 是整数或分数. 他说: "这个道理是普遍的, 不管 x 的序列是什么样的." 这里 x 仍然意味着序列的项的次序. 在这篇手稿中, 他说要微分 $\sqrt{a+bz+cz^2}$ 的话, 设 $a+bz+cz^2=x$, 微分 $\sqrt{x}$, 然后乘以 dx/dz. 这就是链式法则.

1677 年 7 月 11 日左右, Leibniz 又能给出正确的法则去微分两个函数的和、差、积、商以及幂和方根, 但没有证明. 在 1675 年 11 月 11 日的手稿中, 他致力于 $d(uv)$ 和 $d(u/v)$, 并认为 $d(uv)=du\cdot dv$.

1680 年, dx 成为横坐标的差, dy 成为纵坐标的差. 他说: "……现在把 dx 和 dy 取为无穷小, 或者把曲线上的两个点理解为它们中间的距离比任何给定的长度都小……." 他把 dy 叫做当纵坐标沿着 x 轴移动时 y 的"瞬刻的增长". 但是图 17.18 中的 PQ 仍被认为是直线的部分. 它是"曲线的一个元素, 或者是代替曲线的无穷多角的多边形的一条边. ……" 他继续用通常的微分形

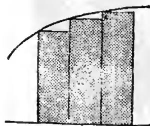


图 17.19

式. 例如,如果 $y=a^2/x$, 则

$$dy=-\frac{a^2}{x^2}dx.$$

他还说差是相反于和的. 因此为了得到曲线下的面积(图 17.19), 他就计算矩形的和并说能忽略剩余的"三角形,因为它们同矩形相比是无穷小……,因此在我的微积分中,我用 $\int y\,dx$ 表示面积……."对于弧的元素,他给出

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

对于曲线绕 x 轴旋转而得到的旋转体体积,他给出

$$V=\pi\int y^2\,dx.$$

尽管他先前说过, dx 和 dy 是很小的差, 但他仍然谈到序列. 他说,"差与和是彼此相反的, 这就是说, 一个级数 [序列] 的差之和是级数的项, 级数和的差也是级数的项, 所以我用 $\int dx=x$ 表示前者, 用 $d\int x=x$ 表示后者." 事实上, 在 1684 年以后写的手稿中, Leibniz 说他的无穷小方法已经众所周知地作为差的微积分了.

Leibniz 在微积分方面的首次发表的文章是在 1684 年的《教师学报》[12]上. 在这篇文章中, dy 和 dx 的意义仍然是不清楚的. 在一个地方,他说设 dx 是任意的量, dy 是由(图 17.18)

$$dy:dx=y:\text{次切线}$$

来定义的. dy 的这个定义假定了次切线的一些表达式; 因此, 这个定义不是完全的. 另外, Leibniz 把切线定义为连结两个无限邻近的点的直线, 也不是令人满意的.

在这篇文章中,他还给出在 1677 年获得的两个函数的和、积、商的微分法则以及求 $d(x^n)$ 的法则. 对于最后一种情况, 他对于

(12) *Acta Erud.*, 3, 1684, 467～473=*Math. Schriften*, 5, 220～226.

n 是正整数的情况作出了证明，但是他说对于所有的 n，它都是正确的；对于其他法则他没有证明．他给出求切线、求最大最小值以及求拐点方面的应用．这篇 6 页长的文章，是如此的不清楚，以至 Bernoulli 兄弟说它"与其说是解释，不如说是谜．"[13]

在 1686 年的论文中[14]，Leibniz 给出

$$y=\sqrt{2x-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

作为摆线的方程．这里，他的意图在于说明用他的方法和符号，可以把一些曲线表为方程，而其他方法是办不到的．在他的《历史》中他重申了这一点，他说他的 dx，ddx(二阶微分)，以及作为这些微分的逆的和能应用到所有的 x 的函数，而且不排除 Vieta 和 Descartes 的机械曲线，虽然 Descartes 曾说过这种曲线没有方程．Leibniz 还说，他能包括那些即使用 Newton 的级数法也不能处理的曲线．

在 1686 年及其后来的论文中[15]，Leibniz 给出对数函数和指数函数的微分并承认指数函数是一类．他还讨论了曲率、密切圆和包络理论(见第 23 章)．1697 年在给 John Bernoulli 的一封信中，他在积分号下对参变量求微分．他还有这样的想法，即许多不定积分能够在化为已知形式后计算出来，并说在为这种化法准备表格，换句话说，就是准备一个积分表．他试着定义如 $d\,dy\,(d^2y)$ 和 $dd\,dy\,(d^3y)$ 等高阶微分，但是定义不令人满意．他还想发现 $d^{\alpha}y$ 的意义，其中 α 是任意实数，但没有成功．

谈到记号，Leibniz 煞费苦心地工作，要把记号选得最好．当然，他的 dx，dy 和 dy/dx 仍然是标准的．他引进记号 $\log x$，对于 n 阶微分引进 d^n，甚至对 $\int$ 与 n 重和分别引进 d^{-1} 与 d^{-n}．

(13) Leibniz: *Math. Schriften*, 3, Part 1, 5.

(14) *Acta Erud.*, 5, 1686, 292～300 = *Math. Schriften*, 5, 226～233.

(15) *Acta Erud.*, 1692, 168～171 = *Math. Schriften*, 5, 266～269; *Acta Erud.*, 1694 = *Math. Schriften*, 5, 301～306.

一般地说，Leibniz 的工作，虽然富于启发性而且意义深远，但它是如此的零碎不全，以致几乎不能理解. 幸好 Bernoulli 兄弟，James 和 John，在 Leibniz 思想的巨大影响和激动下，把他的梗概性的文章大力加工，并做了大量的新发展. 这我们以后将要谈到. Leibniz 同意他们在微积分方面的工作和他一样多.

5. Newton 与 Leibniz 的工作的比较

微积分是能应用于许多类函数的一种新的普遍的方法，这一发现必须归功于 Newton 和 Leibniz 两人. 经过他们的工作，微积分不再是古希腊几何的附庸和延展，而是一门独立的科学，用来处理较前更为广泛的问题.

两人也都算术化了微积分，即在代数的概念上建立微积分. Newton 和 Leibniz 使用的代数记号和方法，不仅给他们提供了比几何更为有效的工具，而且还允许许多不同的几何和物理问题用同样方法处理. 从十七世纪开始到末尾，主要的变化就是微积分的代数化. 这同 Vieta 在方程理论、Descartes 和 Fermat 在几何中所做的是可以比美的.

Newton 和 Leibniz 平分的第三个极端重要的贡献是把面积、体积及其他以前作为和来处理的问题归并到反微分. 因此，四个主要问题——速率、切线、最大值和最小值、求和——全部归结为微分和反微分.

两个人的工作的主要差异是，Newton 把 x 和 y 的无穷小增量作为求流数或导数的手段. 当增量越来越小的时候，流数（或导数）实际上就是增量的比的极限. 而 Leibniz 却直接用 x 和 y 的无穷小增量（即微分）求出它们之间的关系. 这个差别反映了 Newton 的物理方向和 Leibniz 的哲学方向. 在物理方向中，速度之类是中心的概念，而哲学则着眼于物质的最终的微粒; 这些微粒，

Leibniz 称作单子(monad). 从而, Newton 完全是从考虑变化率出发来解决面积和体积问题的. 对于他来说, 微分是基础; 这个过程和它的逆解决了所有的微积分问题. 事实上, 用和来得到面积、体积或者重心, 在他的著作中是少见的. 相反, Leibniz 首先着想的是和, 当然这些和仍是用反微分计算的.

这两个人的工作的第三个差别, 在于 Newton 自由地用级数表示函数; 而 Leibniz 宁愿用有限的形式. 在 1676 年给 Leibniz 的信中, Newton 强调用级数, 甚至对于解简单的微分方程也如此. 虽然 Leibniz 用了无穷级数, 但他回答说, 真正的目标是在确定的范围内获得结果, 在代数函数不能起作用的地方, 要用三角函数和对数函数. 他向 Newton 回忆 James Gregory 的断言: 椭圆和双曲线的长度不能归结为圆函数和对数函数, 他向 Newton 挑战用级数来决定 Gregory 是否正确. Newton 回答说, 用级数他能决定一些积分是否能在有限项的范围内得到, 但没有给出判别法. 再者, 在 1712 年给 John Bernoulli 的信中, Leibniz 反对把函数展成级数, 他说微积分应着眼于把结果归结为求积(积分), 而且如果必要的话, 归结为含有超越函数的积分.

他们的工作方式也不相同. Newton 是经验的、具体的和谨慎的, 而 Leibniz 是富于想象的、喜欢推广的而且是大胆的. Leibniz 更关心的是用运算公式创造出广泛意义下的微积分, 例如函数的积或商的微分法则, 关于 $d^n(uv)$ (u 和 v 都是 x 的函数)的法则, 以及积分表. 正是他, 建立了微积分的规范, 即法则和公式的系统. 至于 Newton, 即使他能容易地推广他的具体结果, 他也没有费心去提出法则. 他知道, 如果 $z=uv$, 那么 $\dot{z}=u\dot{v}+v\dot{u}$, 但他并没有指出这个普遍的结论. 虽然 Newton 创立了许多方法, 但他并没有加以强调. 他的宏伟的微积分应用不仅证明了它的价值, 而且远远超过 Leibniz 的工作, 刺激并决定了几乎整个十八世纪分析的方向. Newton 和 Leibniz 在对记号的关心方面也有差别.

Newton 认为这事无关紧要，而 Leibniz 却花费了很多日子来选择富有提示性的记号.

6. 优先权的争论

1687 年以前，Newton 没有发表过微积分方面的任何工作，虽然他从 1665 年到 1687 年把结果通知了他的朋友. 特别地，1669 年他把他的短文«分析学»送给 Barrow，后者把它送给 John Collins. Leibniz 于 1672 年访问巴黎，1673 年访问伦敦，并和一些知道 Newton 工作的人通信. 然而，他直到 1684 年才发表微积分的著作. 于是就发生 Leibniz 是否知道 Newton 工作详情的问题，他被指责为剽窃者. 但是，在这两个人死了很久以后，调查证明：虽然 Newton 工作的大部分是在 Leibniz 之前做的，但是 Leibniz 是微积分主要思想的独立发明者. 两个人都受到 Barrow 的很多启发，虽然 Barrow 几乎无例外地用了几何方法. 这场争吵的重要性不在于谁胜谁负的问题，而是使数学家分成两派. 大陆的数学家，尤其是 Bernoulli 兄弟，支持 Leibniz，而英国数学家捍卫 Newton. 两派不和甚至尖锐地互相敌对；John Bernoulli 甚至嘲笑并猛烈攻击英国人.

这件事的结果，英国的和大陆的数学家停止了思想交换. 因为 Newton 在关于微积分的主要工作和第一部出版物，即«原理»中使用了几何方法，所以在他死后差不多一百年中，英国人继续以几何为主要工具. 而大陆的数学家继续 Leibniz 的分析法，使它发展并得到改善. 这些事情的影响非常巨大，它不仅使英国的数学家落在后面，而且使数学损失了一些最有才能的人应可作出的贡献.

7. 微积分的一些直接增补

微积分当然是数学中最庞大的部分的开端，这一部分一般叫

做分析．我们将在以下几章里叙述这个领域中的重要发展；但是在这里，我们可以注意在 Newton 和 Leibniz 的基础工作之后立即作出的一些补充．

在 Newton 的«普遍的算术»(1707)中，他建立了多项式方程实根的上界定理．这个定理说：数 a 是 $f(x)=0$ 的实根的上界，如果用 a 代替 x 时，$f(x)$ 和它的所有的导数，都给出相同的符号．

在他的«分析学»和«流数法»中，他给出一个一般的方法去逼近 $f(x)=0$ 的根，这个方法发表在 1685 年的 Wallis 的«代数»里．Joseph Raphson (1648～1715) 在小册子«普遍方程分析» (*Analysis Aequationum Universalis*, 1690) 中，改善了这个方法；虽然他只把这个方法应用到多项式，但它有更广泛的用处．这个修改后的方法现在叫做 Newton 法或者 Newton-Raphson 法．它首先是选择一个近似值 a．然后计算 $a-f(a)/f'(a)$．记这数为 b，再计算 $b-f(b)/f'(b)$．把结果记为 c，如此继续做下去．数 a、b、c、… 是根的逐次近似值(用的记号是现在的)．实际上，这个方法不一定给出根的越来越好的近似值．J. Raymond Mourraille 在 1768 年证明，a 必须选择得使 $y=f(x)$ 的曲线在 a 和根的区间内凸向 x 轴．很久以后，Fourier 也独立地发现了这一点．

Michel Rolle (1652～1719) 在他的«任意次方程的一个解法的证明» (*Démonstration d'une méthode pour résoudre les égalitéz de tous les dégrez*, 1691) 中给出了著名的现在以他的名字命名的定理，即如果函数在 x 的两个值，比如说 a 和 b 处等于 0，那么在 a 和 b 之间的某个 x 值上，函数的导数等于 0．Rolle 叙述了定理但没有证明．

在 Newton 和 Leibniz 之后，微积分的两个最重要的奠基者是 Bernoulli 兄弟，James 和 John．James (也叫 Jakob 或 Jacques) Bernoulli (1655～1705) 是自学数学的，因而在这门学科中成熟缓慢．在他父亲的敦促下，他为做一个牧师而进行学习，但最后转向

了数学，并在1686年成为巴塞尔(Basle)大学的教授. 从此以后，他的主要兴趣就是数学和天文学. 在1670年代末，当他开始研究数学问题时，他还不知道Newton和Leibniz的工作. 他也学习了Descartes的《几何》、Wallis的《无穷的算术》以及Barrow的《几何讲义》. 虽然他从Barrow那里学到很多，但他却把Barrow的结果表为分析的形式. 他逐渐地熟习了Leibniz的工作，但是因为后者的工作很少印出发表，所以使得James的许多结果和Leibniz重迭. 实际上，他和当时的数学家一样，并没有充分理解Leibniz的工作.

James的活动和他的弟弟John(或叫做Johann或Jean，1667～1748)的活动紧密地连接在一起. John被他的父亲送去经商，但转向了医学，并从他哥哥那里学习数学. 他成为荷兰格罗宁(Groningen)的数学教授，后来继承他的哥哥成为巴塞尔的数学教授.

James和John都经常地和Leibniz、Huygens以及其他数学家通信，他们俩也互相通信. 所有这些人都致力于信中提出的或者提出作为挑战的许多共同的问题. 在这些日子里，因为结论也是在信中通知的，随后也没有发表，所以谁先发现是一个复杂的问题. 有时把信誉归于那些虽已公开但当时还没有证明的结论. 问题由于独特关系的出现而更加复杂化. John非常急于成名而开始和他的哥哥竞争；很快两人在许多问题上互相挑战. John毫不迟疑地用不正当手段把别人的，包括他哥哥的成果作为自己的结果. James非常敏感，并且照样回击. 他们各自发表文章，大部分互相取资，但不指明他们思想的来源. John实际上成了他哥哥的尖刻的批评者，Leibniz想在两人之间进行调和. 虽然在赞扬Barrow时，James早就说过，Leibniz的工作不应该贬低，但是他越来越怀疑Leibniz. 另外，他忿恨Leibniz超等的洞察力，认为Leibniz态度傲慢，因为James认为起源于自己的事情，Leibniz声

称他已经做了. 他开始确信 Leibniz 蓄意要贬低他的工作, 而且在他们兄弟间的争吵中偏袒 John. 当 Nicholas Fatio de Duillier (1664～1753)赞扬 Newton 创立了微积分而且卷入与 Leibniz 的争论时, James 写信给 Fatio 反对 Leibniz.

至于 Bernoulli 弟兄在微积分方面的工作, 也是关于求曲线的曲率、法包线(曲线的法线的包络)、拐点、曲线的求长以及其他基本的微积分课题. Newton 和 Leibniz 的结论后来扩展到各种各样的螺线、悬链线和曳物线(它是这样一条曲线, 其中 PT 和 OT 的比等于常数, 图 17.20). James 还写了五篇关于级数的文章(第 20 章第 4 节), 文章把 Newton 的级数的应用扩展到积分复杂的代数函数和超越函数. 1691 年 James 和 John 给出曲线的曲率半径的公式. James 称之为"黄金定理"并写作

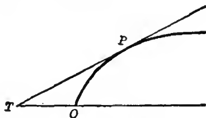


图 17.20

$$z = dx\, ds : d\,dy = dy\, ds : d\,dx,$$

其中 z 是曲率半径. 如果我们用 ds^2 除每一个比的分子和分母, 就得到

$$z = \frac{dx/ds}{d^2y/ds^2} = \frac{dy/ds}{d^2x/ds^2},$$

这是更熟悉的形式. James 也在极坐标中给出了这个结果.

John 作出一个现今著名的定理, 它是用来求一个分数当分子和分母都趋于 0 时的极限的. 这个定理, 由 John 的学生 Guillaume F. A. l'Hospital(1661～1704) 编入微积分的一本有影响的书《无穷小分析》(*Analyse des infiniment petits*, 1696)中, 现在通称为 L'Hospital 法则.

8. 微积分的可靠性

从引进求速度、切线、最大值和最小值等新方法开始, 它的证

明就被攻击为是不可靠的. Cavalieri 的使用不可分量的最终元素以及他的论据震惊了那些重视逻辑严密性的人们. Cavalieri 答复他们的批评说, 当代的几何学家在逻辑方面比他还随便——Kepler 在他的«测量酒桶体积的新科学»中就是一例. 他继续说, 这些几何学家在面积计算中满足于模仿 Archimedes 的求直线的总和的方法, 但没有能够给出象希腊人用来使工作严密的那种完整的证明. 他们满足于他们的计算, 只要结果有用就行了. Cavalieri 感到有理由采用同样的观点. 他说, 他的做法能引向新的创造, 而且他的方法一点也没有强迫人们把一个几何结构看成是由无穷多部分组成的; 除了在面积之间和体积之间建立正确的比之外, 没有其他目的. 但是这些比保持它们的意义和值, 而不管人们对于连续统有什么见解. 无论如何, Cavalieri 说: "严密是哲学所关心的, 而不是几何所关心的事情."

Fermat、Pascal 和 Barrow 意识到他们在求和工作中的不严密性, 但是相信照 Archimedes 的方式就能作出严密的证明. 在«Dettonville 的信»(1659)中, Pascal 断言, 无限小的几何与古希腊几何是一致的. 他断言, "凡是能用不可分量的正确法则证明的东西, 也能用古代的方式去严密地证明." 更进一步, 他说不可分法必定会受到任何一个自称为几何学者的数学家的承认. 它和古代的方法只是语言上的不同. 然而, Pascal 对于严密性也有矛盾心理. 有时他辩护道, 内心的干预给我们保证了数学步骤的正确性. 为了做正确的工作所必需的东西是专门的"技巧", 而不是几何的逻辑, 正如宗教对皈依的领会高于理智一样., 在微积分中运用的几何的诗论, 如同圣经中的明显的荒唐事一样; 几何中的不可分量与有限量之间的关系同人类的公正与上帝的公正之间的关系是一样的.

Cavalieri 和 Pascal 提供的辩护适用于无穷小量的求和. 关于导数, 早期的作者如 Fermat 和 Roberval 认为他们有一套简单

的代数程序，这个程序有着非常明白的几何解释，因而能用几何的论据证明是合理的．实际上，当 Fermat 不能用穷竭法去核实他所提出的任何想法时，他谨慎地避免宣布一般性的定理．Barrow 局限于几何论证，而且尽管他攻击代数学家缺乏严密性，可是，对于他的几何论据的可靠性也是不够注意的．

Newton 和 Leibniz 都没有清楚地理解也没有严密地定义他们的基本概念．我们已经观察到他们在定义导数和微分时都是犹豫不定的．Newton 实际上是不相信他违背了希腊几何．虽然他使用了不合他口味的代数和坐标几何，但他认为归根到底他的方法不过是纯几何的自然延展．然而，Leibniz，象 Descartes 一样，是一个思想开阔，很有远见的人，他看到了新思想有长远的潜力，而且毫不犹豫地宣告新科学出世了．因此，对于微积分中严密性的缺乏，不很担心．

对于他的思想的批评者，Leibniz 作出各种不能令人满意的回答．他在 1690 年 3 月 30 日给 Wallis 的信中[16]说：

> 考虑这样一种无穷小量将是有用的，当寻找它们的比时，不把它们当作是零，但是只要它们和无法相比的大量一起出现，就把它们舍弃．例如，如果我们有 $x+dx$，就把 dx 舍弃．但是如果我们求 $x+dx$ 和 x 之间的差，情况就不同了．类似地，我们不能把 xdx 和 $dxdx$ 并列．因此如果我们微分 xy，我们写下 $(x+dx)(y+dy)-xy=xdy+ydx+dxdy$．但 $dxdy$ 是不可比较地小于 $xdy+ydx$，所以必须舍弃．这样就在任何特殊的情况下，误差都小于任何有限的量．

至于 dy、dx 和 dy/dx 的最终的含意，Leibniz 仍然是含糊的．他说 dx 是两个无限接近的点的 x 值的差，切线是连接这样两点的

(16) Leibniz: *Math. Schriften*, 4, 63.

直线．虽然他在各阶无穷小量之间确实作出了区别，但是他没有经过证明就扔掉高阶微分．有时候把无穷小量 dx 和 dy 描述成正在消失的或者刚出现的量，与已经形成的量相对应．这些无穷小量不是 0，但小于任意有限的量．有时他求助于几何，说，高阶微分和低阶微分相比，如同点和直线相比一样[17]，又说 dx 比 x 如同点比地球，或地球的半径比宇宙的半径一样．他认为两个无穷小量的比是不能指出的量之商或者是无限小的量之商，但是这个比仍然能用有限的量表出，如同纵坐标对次切线的比那样．

暴风雨般的攻击和反驳开始于 1694 年和 1695 年荷兰物理学家和几何学家 Bernard Nieuwentijdt(1654～1718)的书．虽然他承认，一般地说来，新方法引向正确的结果，但他批评方法的含糊，并指出有时方法引向荒谬．他抱怨说他无法理解无穷小量怎样和 0 有区别，并质问为什么无穷小量的和能是有限的量．他还质问高阶微分的意义和存在，质问在推理的过程中为何舍弃无穷小量．

在可能写于 1695 年的回答 Nieuwentijdt 的草稿中，以及在 1695 年的《教师学报》的一篇文章中[18]，Leibniz 作出了各种回答．他谈到"过分苛刻"的批评者，并说过分的审慎不应该使我们抛弃创造的成果．然后他说他的方法不同于 Archimedes 方法之处，只在于所用的表达方面，但他自己的方法更好地适应于发明的艺术．"无穷大"和"无穷小"仅仅表示愿要多大就多大和愿要多小就多小的量，这是为了证明误差可以小于任何指定的数——换句话说，就是没有误差．人们能用这些最终的东西——即无穷大量和无数小量——作为一种工具，正如在代数里用虚根有极大的好处一样．

到这时为止，Leibniz 的论据，是他的微积分只用到通常的数

(17) *Math. Schriften*, 5, 322 ff.

(18) *Acta Erud.*, 1695, 310～316 = *Math. Schriften*, 5, 320～328.

学概念. 但是因为不能使他的批评者满意, 所以他说了一个叫做连续性定律的哲学原理, 这原理实际上和Kepler 叙述的是一样的. 1687 年在给Pierre Bayle 的信中[19], Leibniz 叙述这个原理如下:"在任何假定的向任何终点的过渡中, 允许制定一个普遍的推论, 使最后的终点也可以包括进去." 为了支持这个原理, 在 1695 年左右的没有发表的手稿中,

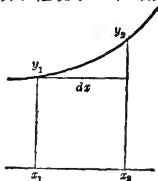


图 17.21

作为例子, 他给出一个把椭圆和抛物线包括在内的论证, 虽然抛物线却是椭圆的一个焦点移向无穷远时的极限情形. 然后他运用这个原理为抛物线 $y=x^2/a$ 计算 dy/dx. 在得到

$$dy:dx=(2x+dx):a$$

之后, 他说:"现在, 因为按我们的公设, 允许在一个普遍的道理下, 也包括纵坐标 x_2y_2 越来越向确定的纵坐标 x_1y_1 移近并最终和它重合的情形(图 17.21), 所以, 明显地, 在这种情形下, dx 成为 0, 并且应该忽略……."Leibniz 没有说明应该给予方程左边的 dx 以什么意义.

他说, 当然, 绝对相等的东西总有一个绝对是无的差别; 因此抛物线不是椭圆.

> 然而一个过渡的状态或者一个消失的状态是可以设想的, 其中实际上仍然没有出现完全的相等或者静止……, 而是进入这样一种状态, 即差小于任何指定的量; 在这种状态中还剩余一些差, 一些速度, 一些角度, 但它们每个都是无穷小…….
>
> 是否这样一个从不等到相等的瞬时过渡……能够保持在严密的或者形而上学的意义中呢? 或者无穷大的扩

(19) *Math. Schriften*, 5, 385,

> 展顺次地越来越大，或者无穷小的扩展顺次地越来越小，这是否是合法的考虑呢？在目前，我承认这可能还是未解决的问题.
>
> 如果当我们说到无穷大(或者更严格些说，无限制的大)或者无穷小量(即在我们的知识中是最小的)时，就理解为我们意味着无限大的或者无限小的量(即要多大就多大，要多小就多小，使得任何人得到的误差可以小于某个指定的量)，那就足够了.
>
> 在这些假定下，我们在1684年10月的《教师学报》中列出的算法的全部规则，都能够不很麻烦地给以证明.

然后Leibniz重新给出这些规则. 他引进量$(d)y$和$(d)x$，并用它们完成通常的微分手续. 他叫这些量是能指定的或者有限的没有消失的量. 在得到最后的结果之后，他说，我们能够用消失的或不能指定的量dy和dx代替$(d)y$和$(d)x$，因为我们"假定消失量dy和dx的比等于$(d)y$和$(d)x$的比，而这个假定永远能归结到一个不容怀疑的真理."

Leibniz的连续性原理确实不是今天的一个数学公理，但是他强调它，而且后来它成为重要的东西. 他给出许多和这个原理相符的论据. 例如在给Wallis的信中[20]，Leibniz为他使用一个没有量的形式的特征三角形，即量缩小为0之后，特征三角形的形式仍然保存作辩护，而且挑战地反问道："谁不承认没有量的形式呢？"同样的，在给Guido Crandi的信中[21]，他说无穷小不是简单的、绝对的零，而是相对的零，这就是说，它是一个消失的量，但仍保持着它那正在消失的特征. 然而，Leibniz在另外的时候又说，他不相信度量中真正的无穷大或者真正的无穷小.

(20) *Math. Schriften*, 4, 54.

(21) *Math. Schriften*, 4, 218.

Leibniz 对于他的一套做法是否正确的最终验证比 Newton 更少关心，认为这应取决于做法的有效性. 他强调他所创造的东西在做法上或算法上的价值. 在某种程度上，他确信只要他清楚地表述并且恰当地运用他的运算法则，就会获得合理而正确的结果，而不管所用符号的意义怎样可疑.

很明显，Newton 和 Leibniz 都没有把微积分的基本概念——导数和积分——弄清楚，更不用说弄精确了. 他们不能正确地掌握这些概念，而是依靠成果的彼此一致和方法的多产，没有严密性地向前推进.

有几个例子可以说明即使在 Newton 和 Leibniz 的卓越的最接近的继承者那里也缺乏明晰性. John Bernoulli 在 1691 和 1692 年写出第一本微积分教材. 积分部分于 1742 年出版[22]；微分部分，«微分学»(*Die Differentialrechnung*)，直到 1924 年才出版. 但是 Marquis de l'Hospital 以他自己的名义在 1696 年出版了一个略加修改的法文译本(前已提到过). Bernoulli 以三条公设开始«微分学». 第一条说："一个量增加或减少一个无穷小量之后，它既没有增加也没有减少."第二条公设是："每一条曲线是由本身是无穷小的无数条直线组成的." 在推理中他追随 Leibniz，用了无穷小量. 例如，为了从 $y=x^2$ 得到 dy，他用 e 代替 dx 并得到 $(x+e)^2-x^2$ 即 $2xe+e^2$，然后只须去掉 e^2. 象 Leibniz 一样，他用了含糊的比拟说明微分是什么东西. 他说，因此无穷大量象是天文距离，而无穷小量象是显微镜揭示出来的微生物. 1698 年他辩论无穷小量必定存在[23]. 为此，只要考虑无穷数列 1, 1/2, 1/4, …就行了. 如取 10 项，1/10 就存在；如取 100 项，1/100 就存在. 相应地取无穷多个项，那就是无穷小量了.

包括 Wallis 和 John Bernoulli 在内的很少的几个人，试着

(22) *Opera Omnia*, 3, 385～558.

(23) Leibniz: *Math. Schriften*, 3, Part 2, 563 ff.

定义无穷小是 ∞ 的倒数，他们认为 ∞ 是明确的数. 还有其他一些人似乎认为，不可理解的东西不需要进一步解释. 对于十七世纪的大多数人来说，严密不是一件关心的事情. 他们经常说的能够用 Archimedes 方法严密化的东西实际上不能够用 Archimedes 式的严密化，对于微分特别是这样，因为在古希腊数学中没有类似于微分的东西.

实际上，新的微积分正在引进与先前的工作根本不同的概念和方法. 经过 Newton 和 Leibniz 的工作，微积分成为一门完全新的要求有它自己的基础的学科. 虽然他们没有完全意识到这一点，但是数学家们已经同过去决裂了.

正确的新概念的萌芽甚至能在十七世纪的文献中发现. Wallis 在«无穷的算术»中，提出了函数的极限的算术概念：它是被函数逼近的数，使得这个数和函数之间的差能够小于任一指定的数，并且当过程无限地继续下去，差最终将消失. 他的话是不严密的，但却包含了正确的思想.

James Gregory 在他的«论圆和双曲线的求积»(1667)中明白指出，求面积、体积和曲线长度的方法，包含一个新的过程，即极限过程. 他又说，这种运算同加、减、乘、除以及开方等五种代数运算的性质不同. 他把穷竭法表为代数的形式，并看出用外切于已知面积或体积的直线形与用内接直线形得到的逐次逼近值都收敛到相同的"最后项". 他还注意到极限过程产生不是有理数的根的无理数. 但是 Wallis 和 Gregory 的见解在他们的世纪中没有引起注意.

微积分的基础仍然是不清楚的. 更加混乱的是：Newton 的支持者继续谈论最初比和最后比，而 Leibniz 的追随者使用无穷小的非零量. 许多英国数学家也许是由于基本上仍然为古希腊的几何所束缚，因而怀疑微积分的全部工作. 这个世纪就这样在微积分处于混乱状态之下结束了.

参考书目

Armitage, A.: *Edmond Halley*, Thomas Nelson and Sons, 1966.

Auger, L.: *Un Savant méconnu: Gilles Persone de Roberval* (1602~1675), A. Blanchard, 1962.

Ball, W. W. R.: *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover(reprint), 1960, pp. 309~370.

Baron, Margaret E.: *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Pergamon Press, 1969.

Bell, Arthur E.: *Newtonian Science*, Edward Arnold, 1961.

Boyer, Carl B.: *The Concepts of the Calculus*, Dover(reprint), 1949.

Boyer, Carl B.: *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 18~19.

Brewster, David: *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir Isaac Newton*, 2 vols., 1855, Johnson Reprint Corp., 1965.

Cajori, Florian: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court, 1919.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, Macmillan, 1919, 2nd ed., pp. 181~220.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, 2nd ed., B. G. Teubner, 1900 and 1898, Vol. 2, pp. 821~922; Vol. 3, pp. 150~316.

Child, J. M.: *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*, Open Court, 1916.

Child, J. M.: *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Open Court, 1920.

Cohen, I. B.: *Isaac Newton's Papers and Letters on Natural Philosophy*, Harvard University Press, 1958.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, Chaps. 7, 11, and 12.

De Morgan, Augustus: *Essays on the Life and Work of Newton*, Open Court, 1914.

Fermat, Pierre de: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1891~1912, Vol. 1, pp. 133~179, Vol. 3, pp. 121~156.

Gibson, G. A.: "James Gregory's Mathematical Work," *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 41, 1922/1923, 2~125.

Huygens, C.: *Œuvres complètes*, 22 vols., Société Hollandaise des Sciences, Nyhoff, 1888~1950.

Leibniz, G. W.: *Œuvres*, Firmin-Didot, 1859~1875.

Leibniz, G. W.: *Mathematische Schriften*, ed. C. I. Gerhardt, 7 vols., Ascher-Schmidt, 1849~1863. Reprinted by Georg Olms, 1962.

More, Louis T.: *Isaac Newton*, Dover (reprint), 1962.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 2, pp. 102～177, 348～403; Vol. 3, pp. 102～138.

Newton, Sir Isaac: *The Mathematical Works*, ed. D. T. Whiteside, 2 vols., Johnson Reprint Corp., 1964～1967. Vol. 1 contains translations of the three basic papers on the calculus.

Newton, Sir Isaac: *Mathematical Papers*, ed. D. T. Whiteside, 4 vols., Cambridge University Press, 1967～1971.

Newton, Sir Isaac: *Mathematical Principles of Natural Philosophy*, ed. Florian Cajori, 3rd ed., University of California Press, 1946.

Newton, Sir Isaac: *Opticks*, Dover (reprint), 1952.

Pascal, B.: *Œuvres*, Hachette, 1914～1921.

Scott, Joseph F.: *The Mathematical Work of John Wallis*, Oxford University Press, 1938.

Scott, Joseph F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chaps. 10～11.

Smith, D. E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, pp. 605～626.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics*, 1200～1800, Harvard University Press, 1969, pp. 188～316, 324～328.

Thayer, H. S.: *Newton's Philosophy of Nature*, Hafner, 1953.

Turnbull, H. W.: *The Mathematical Discoveries of Newton*, Blackie and Son, 1945.

Turnbull, H. W.: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, Royal Society of Edinburgh, 1939.

Turnbull, H. W. and J. F. Scott: *The Correspondence of Isaac Newton*, 4 vols., Cambridge University Press, 1959～1967.

Walker, Evelyn: *A Study of the* Traité des indivisibles *of Gilles Persone de Roberval*, Columbia University Press, 1932.

Wallis, John: *Opera Mathematica*, 3 vols., 1693～1699, Georg Olms (reprint), 1968.

Whiteside, Derek T.: "Patterns of Mathematical Thought in the Seventeenth Century," *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 1961, pp. 179～388.

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*, 2nd ed., George Allen and Unwin, 1950, Chaps. 7～14.

18

十七世纪的数学

考虑了很少的那几样东西之后，整个的事情就归结为纯几何，这是物理和力学的一个目标。

G. W. Leibniz

1. 数学的转变

十七世纪开始时，Galileo 仍然发现与过去开展争论是必要的. 到这个世纪的末尾，数学已经经历了如此广阔而又根本的变化，以致没有一个人不意识到新时代的降临.

欧洲数学家在大约 1550 年到 1700 年间创造的成果比希腊人在大约十个世纪中所创造的要多得多. 这很容易由下面的事实来说明，即数学在希腊只是极少数人从事研究，而在欧洲，教育的传播，虽然一点也不普遍，但促进了英国、法国、德国、荷兰和意大利的数学家的发展. 印刷的发明，使人们广泛地接近了不仅希腊人的著作，而且也接近了欧洲人自己的成果，这在当时用于激发新的思想是很有成效的.

但是这世纪的天才并不仅仅是因为活动性的膨胀而得到证明. 在这个简短的时期中打开的新领域之多种多样是使人印象深刻的. 代数上升为一门科学(因为使用文字系数使证明有了一种尺度)以及它的方法和理论的大大扩展，射影几何和概率论的开端，解析几何，函数概念，而首要的是微积分，都是重大的创新，而且每一个都使希腊人的巨大成就——Euclid 几何相形见绌.

超过数量的扩展和探索的新途径的，是代数和几何作用的完

全颠倒. 希腊人偏爱几何, 因为它是他们能够得到严密性的唯一方式; 甚至在十七世纪, 数学家们还觉得应当用几何证明去为代数方法辩护. 可以说直到1600年数学的主体是几何的, 加上一些代数和三角的附属物. 经过Descartes, Fermat和Wallis的工作, 代数成为不仅仅是适合于本身目的的一套有效方法, 而且也是解决几何问题的极好途径. 分析方法在微积分中表演出来的更大的有效性解决了竞争, 于是代数成为数学中占优势的实体了.

正是Wallis和Newton清楚地看到代数提供了优越的方法论. Descartes认为代数只是一种技巧, Wallis和Newton与他不同, 他们意识到代数是极重要的研究题材. Desargues, Pascal和La Hire的工作被蔑视和忘却了, Cavalieri, 圣文森特的Gregory, Huygens和Barrow的几何方法也被取代了. 纯几何黯然失色了近一百年的时间, 至多不过成为代数的一种解释, 或经由坐标几何到达代数思想的向导. 事实上, 对于«原理»中Newton的几何工作的过分崇拜(由于Newton和Leibniz的争吵而产生的对大陆数学家的敌意, 使这一崇拜增强了)使得英国数学家固执在微积分的几何形式的发展中. 但是他们的贡献和大陆上的人用分析方法所能得到的东西比起来是微不足道的. 到1700年已如此明显的事情, 已被清晰地叙述出来了, Euler表达了这种权威性的说法, 他在他的«无穷小分析引论» (*Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748)中, 赞扬代数大大优越于希腊人的综合法.

数学家们放弃几何的探讨途径是非常勉强的. 按照编注了Newton«原理»第三版的Henry Pemberton(1694～1771)的说法, Newton不仅经常表达对希腊几何学家十分赞赏, 而且还因为不如过去那样更紧密地追随他们而责备自己. 在给James Gregory的侄子David Gregory (1661～1708)的一封信中, Newton评述道: "代数是数学中的笨拙者的分析." 但是他自己1707年的«普遍的算术»却同任何一本建立代数优越性的著作一样. 在这本书中,

他使算术和代数成为基础科学，仅在能使证明容易一些的地方才允许几何存在．同样地，Leibniz 也注意到了代数的增长着的优势，在一篇未发表的随笔[1]中，他被迫说："常常是几何学者能用几句话证明了的，在微积分中却是十分冗长的，……代数的见解是使人放心的，但它并不更好一些."

数学本质的另外一个更微妙的变化已经被大师们不知不觉地承认了．直到1550年，数学的概念还是直接观念化的，或是从经验中抽象出来的．当时负数和无理数已经出现，而且逐渐赢得了承认．再加上，当复数、使用文字系数的广泛的代数以及导数、积分的概念进入数学的时候，问题就变成从人类脑子的深处导出的概念占优势了．特别地，瞬时变化率的概念，虽然在速度的物理现象中当然有一些直观的基础，但是它更多的是思维的产物，它还是与数学中的三角形在质上完全不同的一种贡献．除了这些概念以外，希腊人故意避开的无穷大量和被他们灵巧地捉住的无穷小量，也必定是要辩明的．

换句话说，数学家们在贡献出概念，而不愿意从现实世界中抽象出概念．但是这些概念在物理研究中是有用的，因为(除复数还必须检验它们的价值以外)它们和物质的现实性存在着某种联系．当然，没有真正辨别出所涉及的因果关系，欧洲人对于这些新型的数和微积分概念是心中不安的．然而当这些概念在应用中被证明越来越有用时，他们起先是不情愿地，后来是消极地接受了．熟悉不产生轻视，反而产生承认，甚至是当然的承认．1700年以后，越来越多的、更远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌出的概念，进入了数学，而且以较少的疑虑被接受了．由于数学概念的起源，使它逐渐从感觉的学科转向思维的学科．

微积分结合进数学，产生了另外一个变化，恰恰是在数学概念

(1) Couturat, L: *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*, 1903, reprinted by Georg Olms, 1961, p. 181.

本身，破坏了古希腊人塑造的完美性．我们已经注意到代数和微积分的兴起引出了数学的这些部分的逻辑基础的问题，而且这个问题并没有解决掉．整个世纪中有些数学家由于演绎意义的证明被抛弃而心烦意乱，但是他们的抗议淹没在代数的扩展着的内容和使用以及微积分之中了；这个世纪的末尾，数学家实质上已经扔掉了对明确定义的概念和演绎证明的要求．严格的公理化结构，给出了从特殊的例子，对事物的直观的洞察，以及不严密的几何证据和物理的论点进行归纳的方法．因为演绎法证明已经是数学的最显著的特征，所以数学家们在抛弃他们学科的标志．

回顾一下就容易看到他们为什么会被迫进入这种境地．只要数学家们从直接经验中引出他们的概念，那末定义概念，选择必要的公理，是行得通的——虽然，要说起来，Euclid 在«原本»的第七到第九卷中提出的整数理论的逻辑基础，是十分令人遗憾地有缺陷的．但是，当他们引进不再是观念化直接经验的概念，比如无理数、负数、复数、以及导数和积分时，他们就不能认识到这些概念在本质上是不相同的，从而也就不能认识到那些异于不言而喻的真理的公理发展必需有一个基础．事实上，新概念比旧概念要精细得多；适当的公理基础，正如我们现在所知道的，不可能是容易地建立起来的．

那些对希腊数学造诣很深的、善于批判的数学家们，怎么能满足于在启发性的基础上进行工作呢？他们关心科学中重大的，在某些情况下是紧迫的问题，而且他们所使用的数学又解决了这些问题．他们不愿去探求对新创造的完全理解，也不愿试着去建立必要的演绎式结构，而宁愿用他们的胜利安慰他们的良心．偶然地求助于哲学的或者神秘的教义所获得的成功掩盖了某些困难，使它们不再是明显的．

一个新的目标特别地表现了十七世纪和以后几个世纪数学的特征——方法和成果的普遍化．我们已经注意到了 Vieta（在他

的文字系数的引进中)；射影几何学家们；Fermat 和 Descartes (在对曲线的探索中)； 以及 Newton 和 Leibniz (在对函数的处理中)对方法的普遍性给予的重要地位．至于谈到成果的普遍化，其造诣却是受到限制的．有许多仅仅是一种断言，比如 n 次多项式方程有 n 个根，或者每一个 x 和 y 的二次方程都是圆锥曲线等等．数学的方法和记号对建立普遍性结果来说仍然太局限．然而这一点却成了数学努力的目标．

2. 数学和科学

从古希腊时代起，数学因为它在考察自然中所起的作用而被评价为头等重要的．天文学和音乐经常与数学相连结，而力学和光学则毫无疑问是数学的．但是，数学对科学的关系，在几个方面由于十七世纪的工作而改变了．第一方面，因为大大地扩展了的科学已被 Galileo 指导去使用量的公理和数学的演绎 (第 16 章第 3 节)，所以由科学直接激发的数学的活力就变得占支配地位了．

第二方面，Galileo 指令去寻求数学的描述而不是去探索因果关系的解释，导向了接受象万有引力那样的概念．万有引力和运动定律是 Newton 力学系统的全部基础．因为对万有引力，唯一可靠的认识是数学的认识，所以数学变成了科学理论的实体．造反的十七世纪发现了一个质的世界，它的研究要辅助以数学的抽象而遗留下一个数学的量的世界，它把物质世界的具体性统归在它的数学定律之下．

第三方面，当希腊人在他们的科学中自由地使用数学时，对数学来说，只要 Euclid 基础得到满足，那么，在数学和科学之间就存在着明显的差别．Plato 和 Aristotle 都把这二者区分开来(第 3 章第 10 节和第 7 章第 3 节)，虽然是通过不同的方式的；而 Archimedes 特别清楚哪些是数学地建立起来的，哪些是物理地认识的．

但是，当数学的领域扩张时，数学家不仅依靠物理意义去理解他们的概念，而且还因为数学的论点给出正确的物理结论而接受这些论点，这时，数学和科学之间的界限就变得模糊了．反过来说，当科学变得越来越依仗数学来产生它的物理结论时，数学也变得越来越依赖于科学的成果，来证实自己的做法的正确性．

这个互相依赖的结局是数学同科学的宏大领域的一种实际熔合．在十七世纪中，人们理解的数学范围，可从 Claude-François Milliet Deschales (1621～1678) 著的、1674 年出版、1690 年增订出版的《数学课程或者数学世界》(*Cursus seu Mundus Mathematicus*) 中看到．除了算术、三角和对数以外，他还论述了实用几何，力学，静力学，地理，磁学，土木工程学，(大)木工，石工，军事建筑，流体静力学，液体流动，水力学，船体结构学，光学，透视图，音乐，火器和火炮的设计，星盘，日晷，天文学，日历计算和算命天宫图．最后他还把代数，不可分理论，圆锥理论和诸如二次曲线和螺线那样的特殊曲线包括在内．这本书受到大众的喜爱和尊重．虽然书中包含某些课题是反映了文艺复兴时期的兴趣，但是整个说来，它描绘了十七甚至十八世纪数学领域的一幅合理的图画．

也许有人以为数学家们将会关心于保持他们学科的特性．但是事实并非如此，他们根本不是被迫依赖于物理意义和结果来捍卫他们的论点，事实上，十七(和十八)世纪对数学贡献最大的人或者主要地是科学家，或者至少同等地涉及这两个领域．比如 Descartes, Huygens 和 Newton，他们作为物理学家要大大地超过他们作为数学家．Pascal, Fermat 和 Leibniz 在物理学中是很活跃的．事实上，在这一世纪，很难说出一位对科学没有浓厚兴趣的杰出的数学家的名字．结果是这些人并不希望或企图去作出这两领域的任何差别．Descartes 在他的《思想的指导法则》中说，数学是次序和计量的科学，除了代数和几何以外，还包括天文学、音乐、光学和力学．Newton 在《原理》中说："在数学中我们必须与力的比率一

起研究力的量，这些比率是随假定的任何条件而产生的；所以，当着我们开始研究物理学时，我们要把这些比率和自然现象进行比较……。”这里，物理学指的是实验和观察。Newton 的数学可以看作是今天的数学物理。

3. 数学家之间的交流

直到大约 1500 年，数学还是由单个的人或者由一两个卓越的领袖为首的小团体进行研究的。成果是用口头交流的，偶尔也写成文字——可是，它们是些手稿。因为复制品必须用手抄写，所以是很稀少的。十七世纪时印刷的书籍变得普通一些了，但是即使经过这种改进，知识的传播也并没有如想象那样广泛。因为高等数学的市场是很小的，所以印刷者必须索取高价。好的印刷者是少见的。出版后接踵而来的往往是肆无忌惮的反对者对作者的攻击；对于这种批评家来说，要找出攻击的地方是一点也不费力的，尤其是因为代数和微积分还根本没有牢固的逻辑基础。通常，书籍在任何情况下并不都有新的创造，因为重大的成果不一定以书的形式发表。

结果是造成许多数学家只能通过写信给朋友们来叙述他们的发现。因为害怕信会落到那些可能趁机利用这些非正式文件的人手里，所以写信人常常把成果写成密码或者搞成字谜，当需要的时候就能够把它们翻译出来。

随着参加数学研究的人数的增加，人们要求交换情报资料，要求会见意趣相投的人来互相激励的愿望，导致了科学学会或研究院的组成。1601 年，由青年贵族在罗马建立了“山猫学会”(Accademia dei Lincei)；这个学会持续了三十年。Galileo 在 1611 年成了它的一个成员。另一个意大利学会，实验研究院 (Accademia del Cimento) 于 1657 年在佛罗伦萨(Florence)建立，作为一个经

常在实验室里集会的人们的正式组织，这个实验室是大约十年前由 Medici 家族的两个成员建立的．这个研究院的成员包括了 Vincenzo Viviani (1622～1703) 和 Torricelli，两人都是 Galileo 的学生．遗憾的是，这个学会于 1667 年解散了．在法国，Desargues, Descartes, Gassendi, Fermat 和 Pascal 夹在其他人中间，在 Mersenne 的领导下从 1630 年开始秘密地集会．这个非正式的团体在 1666 年被 Louis XIV 特许为“皇家科学院”，它的成员由皇帝资助．与法国的情况相类似，以 John Wallis 为中心的英国团体 1645 年开始在伦敦格雷萨姆学院 (Gresham College) 集会．这些人强调数学和天文学．1662 年这个团体由 Charles II 颁发了正式的特许书，而且取名为“增进自然知识的伦敦皇家学会”．这个学会致力于数学和科学的应用，认为染色业，货币，射击学，金属精炼，人口统计等都是重要课题．Leibniz 鼓吹了好几年的柏林科学院，终于在 1700 年开办了，Leibniz 当了第一任院长．在俄罗斯，1724 年 Peter 大帝在彼得堡建立了圣彼得堡科学院．

研究院是重要的，不仅由于通过它可以进行直接的接触和思想的交流，而且还因为它们支持了定期刊物．第一个科学刊物(虽然不是由一个科学院主办的) 名叫《博学者杂志》(*Journal de Sçavans* 或 *Journal des Savants*)，于 1665 年开始出版．这个杂志和同一年开始出版的《皇家学会哲学汇刊》(*Philosophical Transactions of the Royal Society*) 是第一批载有数学文章和科学文章的刊物．法国科学院创办了《皇家科学院史以及数学和物理的论文报告》(*Histoire de l'Académie Royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique et de Physique*)．它还发行了《由博学者和会员呈交皇家科学院或者在会上宣读的各种数学和物理的论文报告》(*Mémoires de Mathématique et de Physique Présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Sçavans et Lus dans ses Assembleés*)，也称为《外国学者的论文报告》(*Mémoires des Savants*

Etrangers). 另外一个较早的科学杂志是《教师学报》,于 1682 年开始出版,因为它是拉丁文的,所以很快获得了国际性的读者. 柏林科学院主办了《皇家科学院史和纯文学》(*Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-letiers*, 几年后它的名称改为《Berolinensia 杂集》(*Miscellance Berolinensia*)).

这些科学院和它们的刊物打开了新的科学交流的窗口; 它们和后来的杂志成为发表新的学术研究的公认的工具. 科学院推动了大部分它们所支持的科学家的研究. 例如, Euler 从 1741 年到 1766 年, Lagrange 从 1766 年到1787年都得到柏林科学院的支持. 圣彼得堡科学院在几个不同的时期中支持了 Daniel 和 Nicholas Bernoulli, 从 1727 年到 1741 年支持了 Euler, 并且从 1766 年起再一次支持了他直到 1783 年他逝世为止. 由欧洲政府建立的科学院标志着政府正式进入科学领域和支持科学. 科学的有益性已经得到了承认.

在知识的创造和传播中,现代人认为能起主要作用的机构——大学——这时是不起作用的. 它们是保守的和教条主义的, 被各个国家的官方宗教控制着, 吸收新的知识非常缓慢. 一般说来, 它们只教一点算术、代数和几何. 虽然在十六世纪时剑桥大学有几个数学家, 但是从 1600 年到 1630 年间却一个也没有了. 事实上, 十七世纪初叶在英国, 数学还不是一门课程. 它被认为是魔术. 1616 年出生的 Wallis 曾谈到他少年时期的公共教育, "我们当时的数学很少被看作是学术性的, 而被认为是机械性的——是商人的事情."他进入剑桥大学学习数学, 然而自学得到的东西要多得多. 虽然他准备当一名数学教授, 但他离开了剑桥, "因为在那里研究已经渐渐止息, 而且没有一个专业是为这门课的教师开设的."

数学的教授席位首先是在牛津大学于 1619 年设立的, 后来剑桥大学也设立了. 在这之前, 只有低级的讲师. 剑桥大学的 Lucas

教授席位是1663年建立的，Barrow是它的第一任．Wallis本人在1649年成为牛津大学的教授并保持这一席位到1702年．征聘有才能的教授的障碍是他们必须成为牧师，虽然也有例外，比如Newton就是．不列颠大学一般地(也包括伦敦、格拉斯哥(Glasgow)和爱丁堡(Edinburg))差不多都有同样的历史：从大约1650年到1750年，它们是颇为积极的，但后来积极性衰退了，直到大约1825年．

十七世纪和十八世纪的法国的大学在数学方面是不活跃的．直到十八世纪末，在Napoleon建立第一流的技术学校以前，它们没有作出任何贡献．德国的大学也是这样，在这两个世纪中数学活动是低水平的．我们在前面已指出，Leibniz是孤立的，他责骂大学的教育．哥廷根大学建立于1731年，但是直到Gauss成为那里的教授以后，才缓慢地上升到略微重要的地位．瑞士的日内瓦和巴塞尔的大学中心是我们观察的这段时期的例外；他们能够以拥有Bernoulli兄弟，Hermann和其他一些人而感到自豪．意大利的大学在十七世纪是颇为重要的，但在十八世纪失掉了地位．只要注意到Pascal、Fermat、Descartes、Huygens和Leibniz从来没有在任何一所大学里任过教，而Kepler和Galileo虽然任教了一段时期，但是他们生命的大部分时期是做宫廷数学家，人们就可看到，相对说来大学是何等不重要了．

4．展望十八世纪

十七世纪中代数、解析几何和微积分的巨大进展；数学深深地渗透到科学之中，而科学给它提供了许多深奥而引人入胜的问题；Newton在天体力学中的惊人成就造成的骚动；以及由学会和刊物提供的情报交流的改善：所有这些，全都指向未来数学的更多的重大发展，并服务于创造未来数学的巨大繁荣．

然而有一些障碍必须克服：对于微积分的可靠性的怀疑，英国数学家和大陆数学家的疏远，现存教育制度的低劣状况，对于数学中专业支持的不稳定，使年青数学家或想成为数学家的人踌躇不前．但是数学家的热情几乎是无止境的．他们已经瞥见了福地，急切地坚决向前推进．另外，他们已经能够在当时的气氛中工作了，这种气氛比公元前300年以来的任何时期都要大大地适合于创造．古希腊几何不仅对数学的范围横加限制，而且还对可接受的数学刻下了一条阻碍创造的严格准线．十七世纪的人们已经打破了这两个束缚．数学的进展几乎要求完全忽视逻辑的顾忌；幸好，数学家们现在敢于相信他们的直观和对自然的洞察力了．

参考书目

Hahn, Roger: *The Anatomy of a Scientific Institution: The Paris Academy of Sciences*, 1666～1803, University of California Press, 1971.

Hall, A. Rupert: *The Scientific Revolution*, 1500～1800, Longmans, Green, 1954, Chap. 7.

Hall, A. Rupert, and Marie Boas: *The Correspondence of Henry Oldenburg*, 4 vols., University of Wisconsin Press, 1968.

Hartley, Sir Harold: *The Royal Society: Its Origins and Founders*, The Royal Society, 1960.

Ornstein, M: *The Role of Scientific Societies in the Seventeenth Century*, University of Chicago Press, 1938.

Purver, Margery: *The Royal Society, Concept and Creation*, Massachusetts Institute of Technology Press, 1967.

Wolf, Abraham: *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries*, 2nd ed., George Allen and Unwin, 1950, Chap. 4.

19

十八世纪的微积分

> 因此，看来现代的数学家们象从事科学的人们那样，在应用他们的原理方面化费的心血比在了解这些原理方面多得多。
>
> Berkeley 主教

1. 引　言

十七世纪最伟大的成就是微积分．由此起源产生了数学的一些主要新分支，如微分方程，无穷级数，微分几何，变分法，复变函数等等．其中某些学科的萌芽确实在 Newton 和 Leibniz 的工作中就已经出现了．十八世纪，人们大量地致力于这些分析分支的发展．但是在这一发展完成之前，首先必须扩展微积分本身．Newton 和 Leibniz 创造了基本的方法，但留下了许多要做的事情：必须清楚地认识或造出许多新的一元函数和二元或多元函数；微分和积分的技巧也必须推广到某些已经存在或别的有待引入的函数；此外还缺少微积分的逻辑基础．第一个目标是扩展微积分的主要内容，而这正是本章与下一章的主题．

十八世纪，人们的确扩展了微积分，并创立了一些新的分析分支，虽则这个过程中遇到了挫折、错误、不完全和创造过程中的混乱．数学家们对微积分及随后产生的分析分支作了纯形式的处理．他们的技巧是很高超的，然而，这些却不是由明确的数学思想指导，而是由直观和物理见解指引的．这些形式的努力经受了后来的批判性检查的考验，并产生了伟大的思想线索．数学新领域

十八世纪数学主要的成就是微积分

的征服有时超过军事上的征服．它大胆地闯入敌人的领土，攻占要塞．然后，就必须由更广阔，更彻底，更谨慎的行动来扩大和支持这些入侵，以保卫那些仅仅暂时地、不牢固地控制了的东西．

在评价十八世纪思想家们的工作和论点时，记住他们对代数和分析不加区别这一点是有益的．因为他们没有意识到需要极限概念，又因为他们没有看出使用无穷级数而产生的问题，所以他们天真地认为微积分只是代数的推广．

十八世纪数学界的中心人物、占统治地位的理论物理学家，并能与 Archimedes, Newton 和 Gauss 为伍的人是 Leonhard Euler (1707～1783)．Euler 出生在巴塞尔(Basel)附近的一个牧师家里，他父亲要他学神学，他进了当地的大学，十五岁毕业．在巴塞尔时，他跟 John Bernoulli 学数学．他决心从事数学研究，并在十八岁时开始发表文章．十九岁时，由于在船的立桅方面的工作，他获得了法国科学院的奖金．通过 John Bernoulli 的两个儿子：Nicholas Bernoulli(1695～1726)和 Daniel Bernoulli(1700～1782)，Euler 在 1733 年获得俄国圣彼得堡科学院的任命．起先，他作为 Daniel Bernoulli 的助手，但很快就接替 Bernoulli 当了教授．虽则，在独裁政府的统治下 Euler 度过了痛苦的几年(1733～1741)，但他却做了数量惊人的研究工作，这些工作的成果出现在圣彼得堡科学院发表的文章中．他还帮助俄国政府解决了许多物理问题．1741 年，应 Frederick 大帝召见，他去柏林，并在那里一直留到 1766 年．在这期间，他给普鲁士王的侄女 Anhalt-Dessau 公主授课．这些讲述数学、天文、物理、哲学及宗教等不同学科的课程，后来以《给一位德国公主的信》(*Letters to a German Princess*) 为名发表；至今读起来仍然引起乐趣．Euler 还应 Frederick 大帝的要求研究了保险问题和运河与水工问题．在这二十五年里 Euler 即使身在柏林，却仍给彼得堡科学院写了上百篇文章，并对那里的事务提出意见．

1766年,Euler虽则怕俄国严寒的气候会影响微弱的视力(他于1735年一眼失明),却仍然应Catherine女王的邀请去俄国.实际上回俄国后不久,他就双目失明了,因而他生活的最后十七年是在全盲中度过的.尽管如此,他在这些年的成果并不亚于以前. Euler有惊人的记忆力,他能背出三角和分析的公式和前一百个质数的前六次幂,至于背诵无数的诗句和全本《伊尼衣德》(*Æneid*),更是不在话下.他的记忆力好得少见,以致对那些有才能的数学家在纸上作起来也很困难的计算,他却能心算出来.

Euler在数学著作方面惊人地多产.他研究的主要数学领域是微积分、微分方程、曲线曲面的解析几何与微分几何、数论、级数及变分法.他将数学用到整个物理领域中去.他创立了分析力学(作为老的几何力学的对立面)及刚体力学学科.他计算了行星轨道中的天体的摄动影响以及阻尼介质中的弹道.他的潮汐理论和船泊航行与设计方面的工作有助于航海.在这个领域中,他的《航海科学》(*Scientia Navalis*, 1749)与《船舶制造和结构全论》(*Théorie compléte de la construction et de la manœuvre de vaisseaux*, 1773)是出色的著作.他研究了梁的弯曲,并计算了柱的安全载荷.在声学中,他研究了声的传播和音乐的和谐与不和谐.他的三卷光学仪器方面的著作对望远镜和显微镜的设计作出了贡献.他是第一个解析地处理光的振动的人,并在考虑了光对以太的弹性和密度的依赖后,推演了运动方程;他还得到了许多光的反射和色散方面的结果.在光学方面,他是十八世纪唯一的赞成波动说反对微粒说的物理学家.理想流体运动的基本微分方程也是他得到的;他还将其应用于人体血液的流动.在热学方面,他(与Daniel Bernoulli)把热看作分子振动,他的《论火》(Essay on Fire, 1738)获得了奖金.他对化学、地质学、制图学也有兴趣,他还画了一张俄国地图.人们说:应用是Euler研究数学的原因,然而,毫无疑问,他对二者都很爱好.

Euler 写了力学、代数、数学分析、解析几何与微分几何、变分法等方面的课本，这些教材在后来一百年甚至更长的时间内都是标准的著作．其中与我们本章有关的是：二卷《无穷小分析引论》(*Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748)——第一本沟通微积分与初等分析的介绍；内容更广泛的《微分学原理》(*Institutiones Calculi Differentialis*, 1755)；与三卷《积分学原理》(*Institutiones Calculi Integralis*, 1768～1770)，这些都是里程碑式的著作．所有 Euler 的书都包含某些有高度开创性的东西．正如我们看到的，他的力学是基于分析方法而不是几何方法．他作出了变分法的第一个重要处理．除课本之外，在一生中的大部分年代里，Euler 都以每年约八百页左右的速率发表高质量的独创性的研究文章．这些文章的质量可由下面的事实来判断，那就是这些文章所得的奖金几乎成了他的固定收入．他的某些书和四百篇研究文章是在他已完全失明后写的．他的著作集的现代版如果全部出完将有七十四卷．

Euler 同他以前的 Descartes, Newton, 及他以后的 Cauchy 不同，他并没有开辟新的数学分支．但没有一个人象他那样多产，象他那样巧妙地把握数学；也没有一个人能收集和利用代数、几何、分析的手段去产生那么多令人钦佩的结果．他是顶括括的方法发明家，又是一个熟练的巨匠．人们可以在数学的所有分支中找到他的名字：其中有 Euler 公式，Euler 多项式，Euler 常数，Euler 积分和 Euler 线．

有人会猜想，这样大的活动量可能是牺牲了所有其他兴趣而实现的．其实不然，Euler 结了婚，并且是十三个孩子的父亲，他经常关心他的家庭及其福利，他教育儿孙们，给他们作科学游戏，念圣经给他们听，一起消磨黄昏．他还喜欢在哲学问题上表白自己，但在这里，他却显得很软弱，为此，他常常受到 Voltaire 责备．有一天他被迫坦白承认他从未研究过任何哲学，并且后悔他一直相

信可以不学而了解它. 但是 Euler 争论哲学的精神仍不衰减, 他持续地致力于它们. 他甚至欣赏从 Voltaire 那儿招来的尖刻批评.

由于他的高尚品质, Euler 赢得了广泛的尊敬, 从而他在晚年能把那时欧洲所有的数学家都当作他的学生. 1783年9月7日在讨论了他那个时代人们的主要话题: Montgolfier 兄弟事件[1]和天王星的发现之后, 就象 J. A. N. C. de Condorcet 的名言说的那样,"他停止了计算, 也停止了生命."

2. 函数概念

正如前面已看到的, 在十七世纪已经引入并使用了函数的概念及简单的代数函数与超越函数. 当 Leibniz、James、John Bernoulli、L'Hospital、Huygens 及 Pierre Varignon (1654～1722) 处理单摆运动, 固定两端的悬索的形状, 曲线运动, 在球上固定罗盘方位的运动(斜驶线), 曲线的渐屈线与渐开线, 光在反射与折射中出现的焦散曲线, 以及一条曲线在另一条曲线上滚动时的路径等问题的时候, 已经不仅使用了已知的函数, 而且使初等函数达到相当复杂的形式. 这些研究和微积分的一般工作的结果是: 初等函数被充分地认识了, 并实际已将它们发展成为我们今天所见到的样子. 例如: 对数函数, 它起源于几何级数与算术级数的项与项之间的关系, 而在十七世纪被当作求 $1/(1+x)$ 的积分所得的级数(第17章第2节), 这时它就在新的基础上被引入了. Wallis、Newton、Leibniz 与 John Bernoulli 对指数函数的研究表明, 对数函数是性质相对简单的指数函数的反函数. 1742年 William Jones (1675～1749) 给出了这种样子的关于对数函数的系统介绍(第13章第2节). Euler 在《引论》一书中定义这两个函数为

(1) Montgolfier 两兄弟在1783年第一次成功地乘上充满热气的气球上了天.

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,\quad \log x=\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1).$$

三角函数的数学也系统化了. Newton 和 Leibniz 给出了这些函数的级数展开式. 两个角的和与差的三角函数 $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$, ……的公式的发展应归功于一批人, 其中有 John Bernoulli 与 Thomas Fantet de Lagny (1660～1734); de Lagny 1703 年在巴黎科学院《记要》上写了一篇这个题目的文章. 此后 Frédéric-Christian Mayer(生卒日期不明), 圣彼得堡科学院的第一批成员, 在和差公式的基础上推导了解析三角的一般恒等式[2]. 最后, Euler 于 1748 年在关于木星和土星运动中的不等式的一篇得奖文章中给出了三角函数的一个十分系统的处理[3]. 在 Euler 1748 年的《引论》中已经搞清了三角函数的周期性, 并引入了角的弧度[4].

当注意到圆弧下的面积由 $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ 给出, 而双曲线下的面积由 $\int\sqrt{x^2-a^2}dx$ 给出时, 双曲函数的研究便开始了. 由于二者相差一个符号, 并且圆弧下面的面积可用三角函数表示(令 $x=a\sin\theta$), 而双曲线下的面积又与对数函数有关, 那么在三角函数与对数函数之间就应该存在一个含有虚数的关系. 这个想法被许多人发展了(见第 3 节). 最后, J. H. Lambert 全面地研究了双曲函数[5].

John Bernoulli 已将函数概念公式化. Euler 在他的《引论》的一开头, 就把函数定义为由一个变量与一些常量, 通过任何方式形成的解析表达式. 他概括了多项式、幂级数、对数表达式与三

(2) 彼得堡科学院通讯 *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 2, 1727.

(3) *Opera*, (2), 25, 45～157.

(4) *Opera*, (1), 9, 217～239, 305～307.

(5) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24, 1768, 327～354, pub. 1770=*Opera Math.*, 2, 245～269.

角表达式. 他还定义了多元函数. 随着就有代数函数的概念; 在代数函数中只有自变量间的代数运算, 而代数运算又可分为两类: 只包含四则运算的有理运算与还包括开根的无理运算. 他又引入了超越函数, 即三角函数、对数函数、指数函数、变量的无理数次幂函数及某些用积分表达的函数.

Euler 写道, 函数间的原则区别在于组成这些函数的变量与常量的组合法不同. 他补充道, 例如超越函数与代数函数的区别在于前者重复后者的那些运算无限多次; 也就是说, 超越函数可用无穷级数给出. Euler 和与他同时代的人们都不认为有必要去考虑无穷尽地应用四则运算而得到的表达式是否有效的问题.

Euler 区分了显函数与隐函数, 单值函数与多值函数, 把多值函数当成两个变量的高阶方程的根, 这高阶方程的系数是一个变量的函数. 这里, 他说, 如果一个函数是实变量的实值函数(例如 $\sqrt[3]{P}$, 其中 P 是一个单值函数), 则它大都能包括在单值函数中. 从这些定义 (它们不免有矛盾) Euler 转向有理整函数或多项式. Euler 断言这样的实系数函数能分解为一阶或二阶实系数因子的积(见第 4 节与第 25 章第 2 节).

至于连续函数, Euler 象 Leibniz 及十八世纪的其他作者一样, 把它当作由解析式规定的函数; 他的"连续"一词, 实际上是我们所说的"解析"(除个别的如 $y=1/x$ 的不连续点之外)[6]. 他还认识到了其他的函数; 代表这些函数的曲线被称为"无意识的"或"随意画的".

Euler 的《引论》是第一部首先突出函数概念并把它作为该书二卷内容的基础的著作. 这本书的某些精神可以从 Euler 关于函数的幂级数展开的一些评论中收集到[7]. 他断言任何函数都能这

---

(6) 在他的《引论》二卷第一章中, Euler 引入了"不连续"或混合函数, 它是指在不同定义域, 函数需要不同的解析表达式. 但是这概念在此著作中没有起作用.

(7) *Opera*, (1), 8, Chap. 4, p. 74.

样展开，但又说："如果谁怀疑每个函数都能这样展开，那么这个怀疑就将被实际展开了的函数所排除．然而，为了使现在的研究能推广到最广泛的可能的领域，除 z 的正整数幂外，应允许包含任意指数的项．于是无可争辩的是每一个函数都能展开成 $Az^{\alpha}+Bz^{\beta}+Cz^{\gamma}+Dz^{\delta}+\cdots$的形式，其中 α, β, γ, δ, …可以是任何数．"Euler 按照他自己和所有他同时代人的经验坚信所有函数都能展成级数．而事实上，在那时，所有用解析表达式给出的函数的确都可以展成级数．

虽然，在弦振动问题（见第22章）中发生了关于函数概念的争论，并促使 Euler 去推广自己关于什么是函数的概念；然而十八世纪占统治地位的函数概念仍然是：函数是由一个解析表达式（有限的或无限的）所给出的．例如，Lagrange 在他的《解析函数论》(*Théorie des fonctions analytiques*, 1797)一书中把一元或多元函数定义为自变量在其中可以按任何形式出现并对计算有用的表达式．在《函数计算教程》(*Leçons sur le calcul des fonctions*, 1806)中，他说：函数代表着要得到未知量的值而对已知量必须要完成的那些不同运算，未知量的值本质上只是计算的最终结果．换句话说，函数是运算的一个组合．

3. 积分技术与复量

对于即使稍微复杂一些的代数函数和超越函数，基本的积分法——这个方法是Newton引入的——还是把函数表成级数，再逐项积分．数学家们逐步将积分技巧从一种有限的形式发展到另一种有限的形式．

在十八世纪积分概念的使用是受限止的．Newton 利用了导数与反导数——不定积分，而 Leibniz 则强调微分与微分和．John Bernoulli 大概是追随 Leibniz 的，把积分当作微分的逆来处

理，这样，如 $dy=f'(x)dx$，则 $y=f(x)$．那就是说，Newton 的反导数被选为积分，但微分却用来代替 Newton 的导数．按 Bernoulli 的意思，积分计算的目的是从给定变量的微分之间的关系中找出变量本身之间的关系．Euler 强调导数是消失的微分之比，并说积分所关心的是找出函数本身．只是为了求积分的近似值，他才用和的概念．事实上，十八世纪的所有数学家，都把积分当作导数或微分 dy 的逆．他们从来不问一个积分的存在性，当然在十八世纪所作的大部分应用问题中，积分都能明确地求出来，因而也就不发生积分存在与否的问题．

有几个积分技术发展的例子是值得注意的．为了计算积分

$$\int\frac{a^2dx}{a^2-x^2},$$

John Bernoulli 曾作变量替换[8]

$$x=a\,\frac{b^2-t^2}{b^2+t^2};$$

就把积分化为如下形式：

$$\int\frac{dt}{2at},$$

而这就立即积出一个对数函数来了．John Bernoulli 在 1702 年注意到，并在该年的科学院《记要》上发表了以下事实[9]：

$$\frac{a^2}{a^2-x^2}=\frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right),$$

从而立即可把积分求出．这样，就引入了部分分式的方法．Leibniz 也独立地发现了这一方法，并将它载入 1702 年的《教师学报》[10]．

在 John Bernoulli 和 Leibniz 的通信中，部分分式法还用来求积分

(8) *Acta Erud.*, 1699＝*Opera*, 2, 868～870.

(9) *Opera*, 1, 393～400.

(10) *Math. Schriften*, 5, 350～366.

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

但是，因为 ax^2+bx+c 的一次因子可能是复的，部分分式法就导致下面这种形式的积分：

$$\int \frac{dx}{cx+d},$$

其中 d 至少是复数．然而 Bernoulli 和 Leibniz 都仍然用对数法则来积分，因而不免涉及复数的对数．他们既不顾忌当时复数的混乱，也毫不犹豫地这样作积分．Leibniz 说复数的出现是无害的．

John Bernoulli 反复地运用这些方法．在 1702 年发表的一篇文章中[11]，他指出：正如用替换 $z=b(t-1)/(t+1)$ 将 $adz/(b^2-z^2)$ 变成 $adt/2bt$ 那样，用替换 $z=\sqrt{-1}b(t-1)/(t+1)$ 将微分

$$\frac{dz}{b^2+z^2}$$

变成

$$\frac{-dt}{\sqrt{-1}2bt},$$

而后者是一个虚数的对数的微分．因为原积分也可导出函数 arc tg，所以 Bernoulli 就建立了三角函数和对数函数之间的关系．

可是，这些结果很快引起了关于负数的对数和复数的对数性质的活跃的讨论．Leibniz 于1712年的文章[12]，以及在1712～1713年间他与 John Bernoulli 的通信中都断言负数的对数是不存在的（他说是虚构的），而 Bernoulli 则想法证明它们必定是实的．Leibniz 的论点是：正对数是用于大于 1 的数，而负对数用于 0 到 1 之间的数．因此，不可能有负数的对数．此外，假如 -1 有一个对数，那末 $\sqrt{-1}$ 的对数就是它的一半；而 $\sqrt{-1}$ 肯定是没有对数的．

(11) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1702, 289 ff.=*Opera*, 1, 393～400.

(12) *Acta Erud.*, 1712, 167～169=*Math. Schriften*, 5, 387～389.

Leibniz 在积分中已引出复数的对数后仍要这样论证真是很令人费解的。Bernoulli 争论说：因为

$$(1)\qquad \frac{d(-x)}{-x}=\frac{dx}{x},$$

所以 $\log(-x)=\log x$；又因为 $\log 1=0$，所以 $\log(-1)=0$. Leibniz 反驳道：$d(\log x)=dx/x$ 只对正的 x 成立. 在 1727～1731 年间，Euler 与 John Bernoulli 在第二轮通信中发生了争论. Bernoulli 坚持他的见解，而 Euler 不同意这个见解，虽则当时 Euler 并未坚持自己的意见.

由于一些有关的今天还很有意义的进展，又因为导出了指数函数和三角函数的关系，使最后搞清什么是复数的对数成为可能. 1714 年 Roger Cotes (1682～1716) 发表了一个复数的定理[13]，用现在的记号来表示，这个定理说的是

$$(2)\qquad \sqrt{-1}\,\phi=\log_e(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi).$$

1740 年 10 月 18 日，Euler 在一封给 John Bernoulli 的信中说 $y=2\cos x$ 和 $y=e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}$ 都是同一个微分方程的解(这是他由级数解而认识到的)，因此它们应相等. 1743 年他又发表了[14]这个结果，即

$$(3)\qquad \cos s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}+e^{-\sqrt{-1}s}}{2},\quad \sin s=\frac{e^{\sqrt{-1}s}-e^{-\sqrt{-1}s}}{2\sqrt{-1}}.$$

在 1748 年他重新发现了 Cotes 的结果(2)，它也可由(3)导出.

正当这个发展出现的时候，Abraham de Moivre (1667～1754) 由于撤消了保护卡尔文教徒的南兹敕令而离开法国住到伦敦，这时他至少内隐地得到了现在以他命名的公式. 在 1722 年的一篇笔记中，de Moivre 利用了 1707 年[15]已发表过的结果，他说，代表比为 $1:n$ 的两个角的正矢 ($\operatorname{vers}\alpha=1-\cos\alpha$) 的 x 与 t 之

(13) *Phil. Trans.*, 29, 1714, 5～45.

(14) *Miscellanea Berolinensia*, 7, 1743, 172～192=*Opera*, (1), 14, 138～155.

(15) *Phil. Trans.*, 25, 1707, 2368～2371.

间的关系可由以下两方程消去 z 得到*):

$$1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t$$

与

$$1-2z+z^2=-2zx,$$

在这个结果中隐含着 de Moivre 公式，因为如令 $x=1-\cos\phi$, $t=1-\cos n\phi$, 就可导出

$$(4)\qquad (\cos\phi\pm\sqrt{-1}\sin\phi)^n=\cos n\phi\pm\sqrt{-1}\sin n\phi.$$

对 de Moivre 来说，n 是一个大于零的整数．实际上，他从未明显地写出最终结果；最终的公式是 Euler 给出的[16], Euler 还把此公式推广到任意实数 n.

1747 年前后, Euler 对指数函数、对数函数和三角函数之间的联系已有了充分的经验，足以得到有关复数的对数的正确结论. 1749 年，在题为"论 Leibniz 先生与 Bernoulli 先生关于负数和虚数的对数之争论"[17]一文中，Euler 不同意 Leibniz 的反驳论点 (Leibniz 的论点是 $d(\log x)=dx/x$ 只对正的 x 成立)．他说，如果 Leibniz 的异议正确，就会扰乱全部分析的基础，即规则和运算的应用可以不管应用的对象性质如何．他断言 $d(\log x)=dx/x$ 对一切正数和负数 x 都正确，但补充说：Bernoulli 忘记了从前面的式 (1) 就可以导出 $\log(-x)$ 和 $\log x$ 只差一个常数．这个常数必须是 $\log(-1)$，因为 $\log(-1)=\log(-1\cdot x)=\log(-1)+\log x$. 因此，Euler 说：Bernoulli 实际上假设了 $\log(-1)=0$, 但这是须要证明的．Bernoulli 还作了另一个论证，对此 Euler 也作了回答．例如 Bernoulli 论证道：因为 $(-a)^2=a^2$，所以 $\log(-a)^2=\log a^2$，因而 $2\log(-a)=2\log a$ 或 $\log(-a)=\log a$. Euler 反驳说，因为 $(a\sqrt{-1})^4=a^4$，则 $\log a=\log(a\sqrt{-1})=\log a+\log\sqrt{-1}$, 所以在这种情况下，可推知 $\log\sqrt{-1}$ 应为 0. 但 Euler 说 Bernoulli 本人

*) 此处还应要求 $|z|=1$. ——译者注

(16) *Introductio*, Chap. 8.

(17) *Hist.de l'Acad.de Berlin*,5,1749,139～179 pub.1751=*Opera*, (1),17,195～232.

曾经在另一个场合证明了 $\log\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\,\pi/2$.

Leibniz 曾这样论证道: 因为

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots, \tag{5}$$

则, 对 $x=-2$

$$\log(-1)=-2-\frac{4}{2}-\frac{8}{3}-\cdots,$$

由此可见, $\log(-1)$ 至少不是 0 (事实上, Leibniz 曾经说过: $\log(-1)$ 不存在). Euler 对这个论证的回答是: 由

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots,$$

对 $x=-3$, 可得

$$-\frac{1}{2}=1+3+9+27+\cdots,$$

而对 $x=1$, 可得

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots,$$

因此, 将两式的左右两边分别相加得

$$0=2+2+10+26+\cdots.$$

由此, Euler 说: 由级数得来的论证不证明任何东西.

在反驳了 Leibniz 和 Bernoulli 之后, Euler 给出了一个按现在的标准看来是错误的论证. 他写道

$$x=e^y=\left(1+\frac{y}{i}\right)^i,$$

其中 i 是一个无穷大的数[18]. 则

$$x^{1/i}=1+\frac{y}{i},$$

因此

$$y=i\,(x^{1/i}-1).$$

(18) 在 Euler 的早期著作中, 用 *infinitus* 的第一字母 i 表示一个无穷大的量. 1777 年后, 他用 i 代表 $\sqrt{-1}$.

因为$x^{1/\infty}$是"无穷大次根"，它有无穷多个复值，所以y也有这些值，而因$y=\log x$，所以$\log x$也有无穷多个值. 这里 Euler 事实上写道[19]

$$x=a+b\sqrt{-1}=c(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi).$$

令$c=e^C$，他得到

$$x=e^C(\cos\phi+i\sin\phi)=e^C e^{\sqrt{-1}(\phi\pm2\lambda\pi)},$$

因而

$$y=\log x=C+(\phi\pm2\lambda\pi)\sqrt{-1}, \tag{6}$$

其中λ是正整数或零. 这样，Euler 断言：对于正实数而言，对数只有一个实值，其余都是虚值；但对于负实数或虚数而言，对数的一切值都是虚的. 尽管 Euler 对这问题有成功的解答，但他的工作却并未被人们接受. D'Alembert 提出了形而上学的、解析的、几何的论点去证明$\log(-1)=0$.

4. 椭圆积分

John Bernoulli 在成功地用部分分式法积出某些有理函数后，在 1702 年的《教师学报》上断言，任何有理函数的积分无需包含除三角函数与对数函数以外的任何其他超越函数. 因为有理函数的分母可以是x的一个n次多项式，所以 Bernoulli 的断言的正确性就依赖于能否将任何一个实系数多项式表示成实系数的一阶或二阶因子的乘积. Leibniz 在 1702 年的《教师学报》上的文章中以x^4+a^4为例，认为这是不可能的. 他指出

$$\begin{aligned}x^4+a^4&=(x^2-a^2\sqrt{-1})\,(x^2+a^2\sqrt{-1})\\&=(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})\,(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})\,(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})\\&\quad\times(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}}),\end{aligned}$$

(19) $a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\sqrt{-1}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=c(\cos\phi+i\sin\phi).$

他又说：这四个因子中的任意两个的乘积都不能给出一个实系数的二次因子．假如他能将$\sqrt{-1}$和$-\sqrt{-1}$的平方根表示成通常的复数，他就会看出他的错误所在．Nicholas Bernoulli (1687～1759) (James Bernoulli 和 John Bernoulli 的侄儿) 在1719年的《教师学报》上指出

$$x^4+a^4=(a^2+x^2)^2-2a^2x^2=(a^2+x^2+ax\sqrt{2})(a^2+x^2-ax\sqrt{2});$$

所以函数$1/(x^4+a^4)$能用三角函数和对数函数求积分．

人们也考虑了无理函数的积分．James Bernoulli 和 Leibniz 在这方面曾通过信，因为他们经常遇到这种被积函数．1694年 James Bernoulli 关心弹性问题[20]，即受力细杆(例如在端点受力)所具有的形状问题．对一组端点条件，Bernoulli 发现曲线的方程由下式给出：

$$dy=\frac{(x^2+ab)dx}{\sqrt{a^4-(x^2+ab)^2}};$$

他不能用初等函数来求这个积分．联系到这项工作，他引入了双纽线，其直角坐标方程是$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，其极坐标方程是$r^2=a^2\cos 2\theta$．James Bernoulli 想求出其弧长．从双纽线的顶点到曲线上任一点的弧长由下式给出：

$$s=\int_0^r\frac{a^2}{\sqrt{a^4-r^4}}dr,$$

James Bernoulli 猜测这也不能用初等函数积出来．

在十七世纪，企图求出椭圆的弧长(它对天文学是很重要的)，就导致计算积分

$$s=a\int_0^t\frac{(1-k^2t^2)dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

这里取椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

(20) *Acta Erud.*, 1694, 262～276＝*Opera*, 2, 576～600.

被积函数中 $k=(a^2-b^2)/a^2$, $t=x/a$. 求单摆的周期问题导致求积分

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}.$$

这种无理被积函数还在求双曲线、三角函数等曲线的弧长时出现. 这些积分约在 1700 年就已经闻名了; 还有其他包含这种被积函数的积分在整个十八世纪中都经常出现. 例如 Euler 在他 1744 年关于变分法一书的附录里在有关弹性的权威性处理中得到

$$dy=\frac{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)\,dx}{\sqrt{a^4-(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^2}},$$

其中的常数对我们说来是无关紧要的. Euler 象他的前辈那样用级数的手段来得到物理的结果.

由上面那些例子所组成的一类积分叫椭圆积分, 得名于求椭圆的弧长. 十八世纪的人们还不知道这类积分, 但是这些积分却不能用代数函数、圆函数、对数函数和指数函数积出来(21).

关于椭圆积分的最初的研究不是大量地针对积分求值, 而是针对着把更复杂的一些椭圆积分简化为在椭圆和双曲线求弧长中出现的那些积分. 其方法的根据出自当时占统治地位的几何观点, 即认为表示椭圆和双曲线弧长的那些积分似乎是最简单的. 由于看出了微分方程

$$f(x)\,dx=\pm f(y)\,dy \tag{7}$$

$\left(\text{这里}\int f(x)\,dx\text{ 是一个对数函数或反三角函数}\right)$有一个积分解是 x, y 的代数函数, 这就展现了一个新的观点, 即尽管不能找到 $f(x)\,dx$ 本身的代数的积分解, 但却能找到两个这样的微分的和或差的代数积分解. John Bernoulli 提出了这样一个问题: 除了对数和反三角函数的积分之外, 其他的积分是否就不能保持这个性质了

(21) Liouville 证明了这一点(*Jour. de l'Ecole Poly.*, 14, 1833, 124~193).

呢[22]？他在 1698 年发现了一个偶然得到的，然而却是最漂亮的结果，那就是立方抛物线($y=x^3$)的二段弧的差是可积的．然后，他提出求一些高阶抛物线，椭圆和双曲线弧长的更一般的问题，其中曲线弧的和或差等于一个直线量，他还断言形如 $a^m y^p = b^n x^q, m+p = n+q$ 的抛物线就是这样的曲线，把它们相加或相减就等于一条直线．但是他没有给出证明．

业余数学家 Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano(1682～1766)从 1714 年开始研究了这个问题[23]．他考虑曲线

$$y=(2/m+2)x^{(m+2)/2}/a^{m/2}\quad (m \text{ 为有理数}).$$

对这样的曲线倒不如直接去证明(见图 19.1)

$$\frac{m}{m+2}\int_{x_0}^{x_1}\frac{dx}{\sqrt{1+(x/a)^m}}=\text{arc } PP_1-(P_1R_1-PR),$$

其中 x_0, x_1 分别是 P 与 P_1 的横坐标，PR 和 P_1R_1 分别是 P, P_1 点处曲线的切线．同样

$$\frac{m}{m+2}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{1+(z/a)^m}}=\text{arc } QQ_1-(Q_1S_1-QS).$$

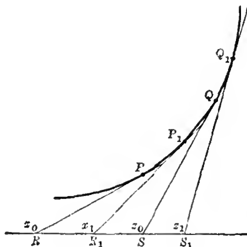


图　19.1

(22) *Acta Erud.*, Oct. 1698, 462 ff. = *Opera*, 1, 249～253.

(23) *Giornale dei Letterati d'Italia*, Vols. 19 ff.

因此, 如 x 和 z 之间有关系:

$$\frac{dx}{\sqrt{1+(x/a)^m}}-\frac{dz}{\sqrt{1+(z/a)^m}}=0, \tag{8}$$

则两个定积分的差应为 0, 这就有

$$\operatorname{arc} QQ_1-\operatorname{arc} PP_1=(Q_1S_1-QS)-(P_1R_1-PR). \tag{9}$$

当 $m=4$ 时 (8) 的解是

$$\frac{x}{a}\cdot\frac{z}{a}=1. \tag{10}$$

所以对 $m=4$, 在曲线 $y=x^3/3a^2$ 上, 端点的横坐标值 x, z 满足 (10) 式的两段弧长之差可用直线段来表示. Fagnano 还对 (8) 式在 $m=6$ 与 $m=3$ 的情形求出了积分.

Fagnano 进而证明了, 在椭圆上如同在抛物线上一样, 可以找出无穷多段弧, 它们的差可以用代数式表示, 虽则单个弧是不能求长的. 于是, 在 1716 年他证明了任何两条椭圆弧的差是代数函数. 他有解析式

$$\frac{\sqrt{hx^2+l}}{\sqrt{fx^2+g}}dx+\frac{\sqrt{hz^2+l}}{\sqrt{fz^2+g}}dz=0, \tag{11}$$

或更简洁地有

$$Xdx+Zdz=0,$$

上面两式中 h, l, f, g, x 与 z 满足条件

$$fhx^2z^2+flx^2+flz^2+gl=0. \tag{12}$$

Fagnano 证明了

$$\int Xdx+\int Zdz=-\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}. \tag{13}$$

上式的几何意义是: 如果 $2a$ 是椭圆的短轴 FA 的长 (见图 19.2), $CH=x$, $CE=z$, JH 是 H 点的纵坐标, 而 GE 是 E 处的纵坐标, 则

$$\operatorname{arc} JD+\operatorname{arc} DG=\frac{-hxz}{2a^2}+C. \tag{14}$$

(为了使(14)式与积分一致，令p为椭圆的参数(正焦弦)，令$p-2a=h$，$l=2a^3$，$f=-2a$，$g=2a^3$。则z为$a\sqrt{2a^3-2ax^2}/\sqrt{2a^3+hx^2}$.)当$x=0$，弧$JD$消失了，在(14)式中的代数项也消

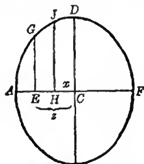


图 19.2

失了．由(12)式，$z=a$，因而DG弧变为DA弧，它正是C的值。于是可以说

$$\operatorname{arc} JD+\operatorname{arc} GD=\frac{-hxz}{2a^2}+\operatorname{arc} DA,$$

或

$$\operatorname{arc} JD-\operatorname{arc} GA=\frac{-hxz}{2a^2}.$$

由此工作[24]出发的一个结果仍叫Fagnano定理，它是在1716年得到的，定理说的是：令

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

是以e为离心率的椭圆，并令$P(x, y)$与$P'(x', y')$是椭圆上两点(见图19.3)，它们的离心角分别为ϕ与ϕ'，ϕ与ϕ'满足条件

(15)
$$\operatorname{tg}\phi \operatorname{tg}\phi'=\frac{b}{a}.$$

于是定理说

(16)
$$\operatorname{arc} BP+\operatorname{arc} BP'-\operatorname{arc} BA=e^2xx'/a.$$

点P与P'可以重合(当满足(15)式时)，若记P与P'重合的这点为F(叫Fagnano点)，他证明了

(17)
$$\operatorname{arc} BF-\operatorname{arc} AF=a-b.$$

(24) *Opera*, 2, 287～292.

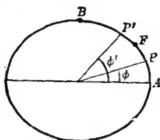


图 19.3

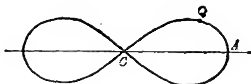


图 19.4

从1714年起Fagnano还致力于用椭圆和双曲线弧求双纽线弧长.

1717和1720年，Fagnano求了其他微分组合的积分. 例如他证明了:微分方程

(18) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

有积分

(19) $$x=-\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$$

或

(20) $$x^2+y^2+x^2y^2=1.$$

这个结果的一种说法是:表示双纽线(它的 $a=1$)弧长的两个积分之间存在一个代数关系，尽管其中每一个积分分开来看属于一类新的超越函数.

Fagnano然后进一步建立了许多类似的关系，以得到关于双纽线的特殊结果[25]. 例如,他证明了,若

(21) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{2dy}{\sqrt{1-y^4}},$$

则

(22) $$\frac{\sqrt{1-y^4}}{y\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}},$$

或解出 x,

(25) *Giornale dei Letterati d'Italia*, 30, 1718, 87 ff.=*Opera*, 2, 304~313.

$$x=\frac{-1+2y^2+y^4}{1+2y-y^4}. \tag{23}$$

Fagnano 由种种这样的结果指出怎样在双纽线($r^2=a^2\cos2\theta$)上找出其四分之一弧段的等分点；就是说，对某个 n 值，这些分点把图 19.4 中的弧 CQA(双纽线的四分之一) n 等分. 他还指出，当给定一弧 CS 时，怎样去找 CS 的二等分点 I. 进而，他找出 CQA 上的点，使它们与 C 点的联线将 CQA 与水平轴 CA 之间的面积分成二、三、五部分；在给出了 n 等分此面积的弦后，他又找到了平分上述各部分的弦.

因此，Fagnano 所作的已经超出了回答 Bernoulli 的问题；他证明了：代表对数函数和反三角函数的积分所具有的那些值得注意的代数性质，至少也为某些类椭圆积分所具有.

约在 1750 年，Euler 注意了 Fagnano 在椭圆、双曲线和双纽线方面的工作，并开始了一系列他自己的研究. 在"不可求长的曲线弧的比较之研究"[26]一文中，Euler 在重复了 Fagnano 的某些工作后指出，在已经将双纽线的四分之一部分的面积 n 等分后，怎样将它 $n+1$ 等分. 然后，他指出，他自己和 Fagnano 的工作提供了积分的某些有用结果，对于方程(18)，除了明显的积分(解)$x=y$ 外. 又加上特解

$$x=-\sqrt{(1-y^2)/(1+y^2)}.$$

Euler 在他的文章"论解微分方程 $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$"[27]中以 Fagnano 的结果为自己的出发点. Fagnano 对他所考虑的大部分微分方程所得的积分都是特解. 它们是代数函数；然而通解却很可能是超越函数. Euler 决定寻找代数形式的通解. 他从

(26) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1756/1757, 58～84, pub. 1761=*Opera*, (1), 20, 80～107.

(27) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1756/1757, 37～57, pub. 1761=*Opera*, (1), 20, 58～79.

(18)出发而希望得到

$$\frac{m dx}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{n dy}{\sqrt{1-y^4}} \tag{24}$$

的通解. 这里 m/n 是有理数，而方程(24)表达了求弧长之比为 $m:n$ 的两段双纽线弧的问题. Euler 说: 他通过尝试而相信，当 m/n 是有理数时，(24)有一个可以代数表达的通解.

从 Fagnano 的研究出发，可见特解(19)与(20)满足方程(18). (18)两边的积分是双纽线上的一段弧长，此双纽线的半轴为1，横坐标为 x. 而解常微分方程(18)相当于求出两段等长的弧. Euler 指出了 $x=y$ 是(18)的另一特解. 通解应该是这样的: 指定其任意常数的值，就得到每一个这样的特解. 由这些事实指引，Euler 求得(18)的通解是

$$x^2+y^2+c^2y^2x^2=c^2+2xy\sqrt{1-c^4} \tag{25}$$

或

$$x=\frac{y\sqrt{1-c^4}\pm c\sqrt{1-y^4}}{1+c^2y^2}, \tag{26}$$

其中 c 为任意常数. 当然，给了(25)式，就不难验证它是(18)式的通解.

在(25)式中隐含的正是通常所谓的这些简单椭圆积分的 Euler 加法定理. 直接求微商就可以得到

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{27}$$

(其中 c 是常数)，显然它是(18)式的一个通解. 因此，x, y 与 c 之间必有关系(25). 于是，加法定理说: 如果(27)式对其中的椭圆积分成立，则积分上限 x 是另外两个积分的任意选择的上限 y 与 c 的代数对称函数，即(26). 我们将看到，加法定理适用于更一般的积分.

利用结果(25)和(27)，可以更直接地证明: 若

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = n\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \tag{28}$$

则 y 是 x 的代数函数. 这个结果叫做椭圆积分 $\int_0^x dx/\sqrt{1-x^4}$ 的 Euler 乘法定理. 由此, 就导出方程(28)的通解; 要点是: 它是关于 x, y 和任意常数 c 的一个代数方程. Euler 指出怎样能得出通解, 但没有明显地给出.

在1756～1757的同一篇文章中, 以及在同一杂志的卷7中[28], Euler 着手处理了更一般的椭圆积分. 他说他由尝试法得到了下面的结果. 若微分

$$\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy+2\varepsilon xy(x+y)+\zeta x^2y^2 = 0, \tag{29}$$

则可得下面形式的微分方程

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0, \tag{30}$$

其中 X, Y 是两个系数相同的四次多项式, 它的四个系数可借助于一个任意常数, 用(29)式的五个系数表示出来. 因而(29)是(30)的通解; 当(30)被指定为(18)时, (29)就变为(25). Euler 指出, 有趣的是: 即使 $dx/\sqrt{X}$ 的积分不能用圆函数或对数函数得到, 但方程(30)仍被一个代数关系满足. 他于是将结果推广到

$$\frac{mdx}{\sqrt{X}}=\frac{ndy}{\sqrt{Y}}, \quad m/n \text{ 是有理数}, \tag{31}$$

其中 X, Y 是具有同系数的四阶多项式. 在 Euler 的《积分学原理》[29]中也有这个结果, 在那里, Euler 用椭圆, 双曲线和双纽线说明了结果的几何意义.

由这些结果, Euler 就能够进而得出现在称为第一类椭圆积分的加法定理. 考虑椭圆积分

---

(28) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1758/1759, 3～48, pub. 1761 = *Opera*, (1), 20, 153～200.

(29) Vol. 1, Sec. 2, Chap. 6 = *Opera*, (1), 11, 391～423.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R(x)}}, \tag{32}$$

其中 $R(x)=Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$. 于是加法定理说: 方程

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \tag{33}$$

有一个关于 x, y 的确定的代数方程的解, 使得其中的 y 能用 x、相应的 $\sqrt{R(x)}$ 的值、任意常数 x_0 和 y_0 以及相应的 $\sqrt{R(x_0)}$ 和 $\sqrt{R(y_0)}$ 的值有理地表示出来. 又当 x 取任意值 x_0 时, y 取事先规定的任意值 y_0.

这个结果容易导出另一个可能更有启发性的定理. 如果两个形如

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} \tag{34}$$

的椭圆积分之和或差等于第三个同样形式的椭圆积分, 又如对三个积分根式中的系数及积分下限也全相同, 则第三个积分的上限是另两积分的上限、公共的下限及 $\sqrt{R(x)}$ 在公共下限及两个上限处相应值的代数函数.

Euler 继续做下去. 正如 Fagnano 对于两个双纽线弧长之差的处理把 Euler 引向一般的第一类椭圆积分一样, Fagnano 关于两个椭圆弧之差的处理(见[11])把 Euler 引到了第二类积分的一个加法定理[30]. 他对于他的方法不能推广到开根次数高于二次或被开方式子高于四次的情况而表示遗憾. 他还看出他工作中的一个重大缺陷, 那就是他未曾用一般的分析方法得到他的代数的通解, 因此他的结果没有自然地与微积分的其他部分联系起来.

在椭圆积分方面权威性的工作是由 Adrien-Marie Legendre (1752~1833) 作出的, 他是军事学校的教授, 曾任多届政府委员, 后来成了多科工艺学校的学监, 直到 1833 年逝世, 他一直保持热

(30) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1758/1759, 3~48, pub. 1761 = *Opera*, (1), 20, 153~200 与 *Inst. Cal. Integ.*, 1, ¶645 = *Opera*, (1), 11, ¶645.

情而有规律的工作．他的名字长存于大量的各种各样的定理中，这是由于他解决了许多类型的问题．但是他的工作既无独创性也不象 Lagrange、Laplace 和 Monge 那样深刻．Legendre 的工作引起许多重要理论的产生，但这只是在他的工作被更强有力的思想接收后才实现．Legendre 恰恰名列于刚才提到的那三个同时代人物之后．

当 1786 年 Legendre 着手椭圆积分这个课题之际，Euler 的加法定理是椭圆积分理论的主要结果．四十年内 Legendre 是仅有的一个在文献内加进有关椭圆积分的研究结果的人．关于这个课题，他贡献了两篇基本的文章[31]，然后写了«积分练习»(*Exercices de calcul intégral*, 3 vols., 1811, 1817, 1826)，«椭圆函数研究»(*Traité des fonctions elliptiques*, 2 vols., 1825～1826)[32]，与三篇说明 Abel 与 Jacobi 在 1829 与 1832 年的工作的补充材料．象 Fagnano 的工作一样，Euler 的结果是与几何考虑联系在一起的，而 Legendre 则集中在分析方面．

Legendre 在他的«研究»中，主要成果是证明了：一般椭圆积分

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx \tag{35}$$

(其中 $P(x)$ 是 x 的任一有理函数，而 $R(x)$ 是通常一般的四次多项式)，能化为三种类型：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}, \tag{36}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}, \tag{37}$$

(31) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1786, 616～643 与 644～683.

(32) 在这本书中"function"的用法被误解了．他研究椭圆积分，并时常是变上限的椭圆积分．这些当然是上限的函数．但现在所指的"椭圆函数"是由Abel与Jacobi在后来引入的．

$$(38)\qquad \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-l^2x^2}}.$$

Legendre 把上面三类积分称为第一、二、三型椭圆积分.

他还证明了：经过进一步的变换这三个积分可化为以下三种形式：

$$(39)\qquad F(k,\ \phi)=\int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\quad 0<k<1,$$

$$(40)\qquad E(k,\ \phi)=\int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi,\quad 0<k<1,$$

$$(41)\qquad \pi(n,\ k,\ \phi)=\int_0^\phi \frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},\quad 0<k<1,$$

其中 n 是一个常数. 在这些形式中，易见从 $\phi=0$ 到 $\phi=\pi/2$ 的积分值与从 $\phi=\pi/2$ 到 $\phi=\pi$ 的积分值相同，积分顺序相反. $\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$ 的记号 $\Delta(k,\ \phi)$ 也是由 Legendre 引入的.

这些形式也可通过变数替换 $x=\sin\phi$ 转化为 Jacobi 形式：

$$(42)\qquad F(k,\ x)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}},$$

$$(43)\qquad E(k,\ x)=\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

$$(44)\qquad \pi(n,\ k,\ x)=\int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

量 k 叫做上面各椭圆积分的模. 如果积分限是 $\phi=\pi/2$ 或 $x=1$，则称此积分是完全的，否则称为不完全的.

Legendre 关于椭圆积分的工作是有许多功绩的. 他从他的前辈的工作中引出许多先前没有的推断，并组织了数学课题；但他没有增加任何基本思想，也没有达到 Abel 与 Jacobi (第 27 章第 6 节)的那种新的洞察力，后两位转化了这些椭圆积分，并从而构思了椭圆函数. Legendre 的确十分谦逊地还可能有点辛酸地开始去认识 Abel 和 Jacobi 的工作，并赞扬他们. 在以他 1825 年的著作的增补篇来阐述他们的新思想时，他清楚地认识到这个材料使

他自己在这方面所做的一切黯然失色．他忽略了他所处的时代的一项最伟大的发现．

5．进一步的特殊函数

椭圆不定积分是一类新的超越函数．随着十八世纪分析方面工作的发展，得到了更多的超越函数，其中最重要的是 Γ 函数．Γ 函数是从插值理论与反微分这两个问题的研究中产生的．James Stirling (1692～1770)，Daniel Bernoulli，和 Christian Goldbach (1690～1764) 考虑了插值问题．问题提给了 Euler，他在 1729 年 10 月 13 日给 Goldbach 的一封信中宣布了他的解答(33)．1730 年 1 月 8 日的第二封信引入了积分问题(34)．1731 年 Euler 在一篇文章"论级数……"(35)中发表了这两方面的结果

Euler 搞的插值问题是对非整数的 n，给出 $n!$ 的意义．Euler 注意到

$$(45)\qquad n!=\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n\frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n\frac{3}{n+3}\right]\cdots=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^n\frac{k}{k+n}.$$

如果将这无穷乘积中的公因子约去，上面的等式形式上看来是正确的．然而，这个 $n!$ 的分析表达式却不象基本定义 $n(n-1)\cdots2\cdot1$ 那样，它对所有的 n (除了 n 是负整数外) 都有意义．Euler 注意到对 $n=1/2$，上式右端经过一些改写后，就产生 Wallis 无穷乘积

$$(46)\qquad \frac{\pi}{2}=\left(\frac{2\cdot2}{1\cdot3}\right)\left(\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\right)\left(\frac{6\cdot6}{5\cdot7}\right)\left(\frac{8\cdot8}{7\cdot9}\right)\cdots.$$

采用后来 Legendre 引入的记号 $\Gamma(n+1)=n!$，Euler 还证明了

(33) Fuss, *Correspondance*, 1, 3～7.

(34) Fuss, *Correspondance*, 1, 11～18.

(35) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1730/1731, 36～57, pub. 1738 = *Opera*, (1), 14, 1～24.

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$，从而得到了 $\Gamma(3/2)$，$\Gamma(5/2)$ 等等.

Euler 曾用(45)作为他阶乘概念的推广. 事实上，这个概念今天常用一个等价形式来引进(Euler 也给出了这个形式)，即

$$\lim_{m\to\infty}\frac{m!(m+1)^n}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}. \tag{47}$$

但是联系到 Wallis 的结果，就使 Euler 着手处理 Wallis 已考虑过的一个积分，即

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx, \tag{48}$$

其中 e 与 n 对 Euler 说来是任意的. Euler 利用二项式定理将 $(1-x)^n$ 展开来计算这个积分，得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^e(1-x)^n dx &= \frac{1}{e+1}-\frac{n}{1\cdot(e+2)}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2(e+3)}\\ &\quad -\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3(e+4)}+\cdots.\end{aligned} \tag{49}$$

对 $n=0, 1, 2, 3, \cdots$，右边的和相应地为

$$\frac{1}{e+1},\ \frac{1}{(e+1)(e+2)},\ \frac{1\cdot2}{(e+1)(e+2)(e+3)},\ \frac{1\cdot2\cdot3}{(e+1)(e+2)(e+3)(e+4)},\ \cdots. \tag{50}$$

因此，对正整数 n，Euler 发现

$$\int_0^1 x^e(1-x)^n dx=\frac{n!}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n+1)}. \tag{51}$$

这时，Euler 找到了一个对任意 n 都成立的 $n!$ 的表达式. 用我们今天不能完全接受的一系列变换得出

$$n!=\int_0^1(-\log x)^n dx. \tag{52}$$

这个积分对几乎任意一个 n 都有意义，叫做 Euler 第二积分，或按后来 Legendre 的叫法，称为伽码函数，用 $\Gamma(n+1)$ 表示. [Gauss

令 $\pi(n)=\Gamma(n+1)$.] 后来, 于1781年(1794年发表) Euler给出了它现在的形式, 那是在(52)中令 $t=-\log x$ 而得到的:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx. \tag{53}$$

Legendre 把积分(48)叫做 Euler 第一积分. 这个积分变成 β-函数的标准化形式:

$$B(m, n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx. \tag{54}$$

Euler 发现了这两个积分之间的关系[36], 即

$$B(m, n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

Legendre 在他的《积分练习》中对 Euler 积分作了深入的研究, 并获得了倍量公式:

$$\Gamma(2x)=(2\pi)^{-1/2} 2^{2x-(1/2)} \Gamma(x) \Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right). \tag{55}$$

Gauss 在他关于超几何函数的著作[37]中研究了 Γ-函数, 并将 Legendre 的结果推广成所谓选乘公式:

$$\begin{aligned} \Gamma(nx)=(2\pi)^{(1-n)/2} n^{nx-(1/2)} \Gamma(x) \Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right) \\ \times \Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right). \end{aligned} \tag{56}$$

6. 多元函数微积分

两个和三个变量的函数的微积分在这个世纪的初期就已出现了. 这里我们将只略述一些细节.

虽则, Newton 从 x 与 y 的多项式方程(即 $f(x, y)=0$) 导出

(36) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16, 1771, 91～139, pub. 1772=*Opera*, (1), 17, 316～357.

(37) *Comm. Soc. Gott.*, II, 1813=*Werke*, 3, 123～162, p. 149(部分).

了我们今天由 f 对 x 或 y 取偏微商而得到的表达式，但是，这个工作未曾发表. James Bernoulli 在他关于等周问题的著作中也用了偏导数，同样 Nicholas Bernoulli(1687～1759)在 1720 年《教师学报》的一篇关于正交轨线的文章中也用了偏导数. 然而创造偏导数理论的是 Alexis Fontaine des Bertins (1705～1771), Euler, Clairaut, 与 d'Alembert.

通常的导数与偏导数的区别在一开始并未被人们明确地认识，因而对两者都用同样的记号 d 表示. 物理意义要求人们在多个自变量的函数中，考虑只有某一个自变量变化的导数.

Clairaut[38]得到了 $dz=pdx+qdy$ 是恰当微分的条件，其中 p、q 是 x、y 的函数. 所谓恰当微分是指它可由函数 $z=f(x, y)$ 作微分 $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ 而得到. Clairaut 的结果是：$pdx+qdy$ 是恰当微分$\left(\text{即存在一个函数 } f \text{ 使 } \frac{\partial f}{\partial x}=p,\ \frac{\partial f}{\partial y}=q\right)$当且仅当 $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$.

两个或多个变量的函数的偏导数研究的主要动力来自早期偏微分方程方面的工作. 因而，偏导数的演算是由 Euler 研究流体力学问题的一系列文章提供的. 他在 1734 年的一篇文章中[39]证明，若 $z=f(x, y)$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

在 1748 年到 1766 年写的其他文章中，他处理了变量替换，偏导数的反演和函数行列式. D'Alembert 在 1744 与 1745 年的动力学著作中推广了偏导数的演算.

多重积分实际上已含于 Newton 的工作中，他在《原理》中讨

(38) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1739, 425～436 与 1740, 293～323.

(39) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 174～193, pub. 1740=*Opera*, (1), 22, 36～56.

论球与球壳作用于质点上的万有引力时就涉及到．然而，Newton 用的是几何论述．在十八世纪，Newton 的工作被人以分析形式加以考虑并推广．这个世纪的上半叶，重积分出现了并被用来表示 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f(x, y)$ 的解．例如，它也用来确定一个薄片作用在一个质点上的万有引力．这样，厚度为 δc 的椭圆薄片作用在椭圆中心正上方 c 个单位处一个质点上的引力是积分

$$\delta c \iint \frac{c\,dx\,dy}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}}$$

的常数倍，其中积分区域是由 $(x^2/a^2)+(y^2/b^2)=1$ 围成的椭圆．这个积分由 Euler 在 1738 年用累次积分[40]算出．他先对 y 积分，然后将新的被积函数展成 x 的无穷级数．

1770 年左右，Euler 对由弧围成的有界区域上的二重定积分确实已有了清楚的概念．他给出了用累次积分计算这种积分的程序[41]．Lagrange 在他关于旋转椭球的引力的著作中[42]用三重积分表示引力．他在发现用直角坐标来计算很困难后，转用球坐标．他引入

$$x=a+r\sin\phi\cos\theta,$$
$$y=b+r\sin\phi\sin\theta,$$
$$z=c+r\cos\phi,$$

其中 a, b, c 是新原点的坐标，θ 是经度角，ϕ 是纬度角，且 $0\leqslant\phi\leqslant\pi$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$．这个积分变换的实质是用 $r^2\sin\theta d\theta d\phi dr$ 代替 $dxdydz$．自此 Lagrange 开始了多重积分变换的课题．其实 Laplace 也几乎同时作出了球坐标变换[43]．

(40) *Comm. Acad Sci. Petrop.*, 10, 1738, 102～115, pub. 1747＝*Opera*, (2), 6, 175～188.

(41) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14, 1769, 72～103, pub. 1770＝*Opera* (1), 17, 289～315.

(42) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773, 121～148, pub. 1775＝*Œuvres*, 3, 619～658.

(43) *Mém. des sav. étrangers*, 1772, 536～544, pub. 1776＝*Œuvres*, 8, 369～477.

7. 在微积分中提供严密性的尝试

随着微积分的概念与技巧的扩展，人们努力去补充被遗漏的基础。在 Newton 和 Leibniz 不成功地企图去解释概念并证明他们的程序是正确的之后，一些微积分方面的书出现了。它们试图澄清混乱，但实际上却更加混乱。

Newton 探讨微积分的方法比 Leibniz 的方法容易严密化，虽则后者的方法更富于成果，更便于应用。英国人想，他们如果把 Newton 和 Leibniz 的方法与 Euclid 几何连结起来，就能使二者都保证严密。但是他们将 Newton 的瞬 (moments, 即他的不可分增量)和他处理连续变量时用的流数混淆了。追随 Leibniz 的欧洲大陆上的人们用微分进行计算，并试图把这个概念严密化。微分有时被当作无穷小量，即非零的但又无任何有限大小的量，有时又被当作零。

Brook Taylor (1685～1731)是 1714 年到 1718 年的皇家学会秘书，在他的«增量法及其逆»(*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, 1715)中，他力图搞清微积分的思想，但他把自己局限于代数函数与代数微分方程。他以为他总能只与有限增量打交道，但在增量过渡到流数时，他就糊涂了。正当英国学者试图将微积分和几何或速度的物理概念联结起来的时候，Taylor 的阐述是建立在我们叫做有限差分的基础上的，因为它本质上是算术的，所以得不到许多支持者。

从 Thomas Simpson (1710～1761) 的 «有关流数的一篇新论文»(*A New Treatise on Fluxions*, 1737)一文中，也可以看到十八世纪致力于严密性的工作是含糊不清的，也是不成功的。Simpson 在一些预备定义之后，这样定义流数："一个流动的量，按它在任何一个位置或瞬间所产生的速率(从该位置或瞬间起持续不变)，在

一段给定的时间内，所均匀增长的数量称为该流动量在该位置或瞬间的流数.”用我们的话说，Simpson 是用 $(dy/dt)\Delta t$ 来定义导数. 其他一些作者放弃了这种想法. 法国数学家 Michel Rolle 在一个地方告诫说，微积分是巧妙的谬论的汇集.

十八世纪仍然表明有对微积分的新攻击. 其中最强的攻击来自 George Berkeley 主教(1685～1753)，他害怕机械论和决定论对宗教日益增长的威胁. 1734年，他发表了«分析学者，或致一个不信教的数学家. 其中审查现代分析的对象、原则与推断是否比之宗教的神秘与信条，构思更为清楚，或推理更为明显»(*The Analyst, Or A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith*).“先除掉你自己眼睛里的障碍，你才能看得清去拨掉你兄弟眼中的灰尘.”(“不信教的数学家”指 Edmond Halley.)[44]

Berkeley 正确地指出了那时数学家们是归纳地而非演绎地推进，他们对自己的每一步既没有给出逻辑，也没有说明理由. Berkeley 批判了 Newton 的许多论点；例如：在«求曲边形的面积»一文中，Newton 说他避免了无穷小，他给 x 以增量 o，展开 $(x+o)^n$，减去 x^n，再除以 o，求出 x^n 的增量与 x 的增量之比，然后扔掉含 o 的项，从而得到 x^n 的流数. Berkeley 说 Newton 首先给 x 一个增量，然后又让它是零，这违背了背反律，而且所得的流数实际上是 0/0. Berkeley 还攻击 l'Hospital 和其他欧洲学者提出的微分法. Berkeley 说微分之比应该决定割线而不是决定切线；忽略了高级无穷小才消除了误差. 因此“依靠双重错误你得到了虽然不科学却是正确的结果”，这是因为错误互相抵偿的缘故. 他还挑中二阶微分 $d(dx)$ 作文章，因为 $d(dx)$ 是 dx 的微分，而 dx 本

(44) George Berkeley: *The Works*, G. Bell and Sons, 1898, Vol. 3, 1～51.

身是一个很难识别的量. 他说:"在每一门其他科学中, 人们用他们的原理证明他们的结论, 而不是用结论来证明他们的原理."

至于导数被当作 y 与 x 消失了的增量之比, 即 dy 与 dx 之比, Berkeley 说它们"既不是有限量也不是无穷小量, 但又不是无."这些变化率只不过是"消失了的量的鬼魂. 当然, ……我想, 能消化得了二阶或三阶流数的人, 是不会吞食了神学论点就要呕吐的."他下结论说, 流数的原理并不比基督教的更清楚. 他否定现代分析的对象、原理和推理比宗教的神秘和信仰的论点更为构思清楚, 推理明显.

James Jurin (1684～1750) 对《分析学者》作了回击. 1734 年他发表了《几何学, 非不信教的朋友》(*Geometry, No Friend to Infidelity*). 在此文中他坚持认为流数对精通几何的人说来是清楚的. 然后他徒劳地试图解释 Newton 的瞬与流数. 例如 Jurin 将变量的极限定义为"被变量连续地逼近的某确定的量", 而且可逼近得比任何给定的差更近. 然而, 他又加上一句:"但永不超出它."他将这个定义应用于变量之比(差商). Berkeley 的使人无言以对的回击, 名叫《捍卫数学中的自由思想》(*A Defense of Free-thinking in Mathematics*, 1735)[45] 的文章指出: Jurin 是在捍卫他所不了解的东西. Jurin 作了反击, 但并没有把事情搞清楚.

而后, Benjamin Robins (1707～1751) 以他的几篇专论和一本书:《论 Isaac Newton 爵士的流数法以及最初比与最终比方法的本质与可靠性》(*A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions and of Prime and Ultimate Ratios*, 1735) 参加争论. Robins 忽视了 Newton 的第一篇文章中的瞬, 而强调流数以及最初比和最终比. 例如他这样定义极限:"当一个变量能以任意接近程度逼近一最终的量(虽然永不能绝对等于它), 我们定义这个最终的量为极限."他认为流数是一

(45) George Berkeley: *The Works*, G. Bell and Sons, 1898, Vol. 3, 53～89.

个正确的想法，而最初比和最终比仅仅是一种解释．尽管他是用变量逼近极限来作解释的，但 Robins 补充说流数法的建立并不求助于极限．他不承认无穷小．

为了回击 Berkeley, Colin Maclaurin (1698～1746) 在他的《流数论》(*Treatise of Fluxions*, 1742) 中，企图建立微积分的严密性．这是一个值得赞扬的，却并不正确的努力．象 Newton 一样，Maclaurin 喜爱几何，因而他试图根据希腊几何和穷竭法（特别是 Archimedes 的穷竭法）建立流数学说．他希望这样可以避开极限概念．他的本领是熟练地使用几何，所以他常劝别人用几何而忽视分析．

欧洲大陆上的数学家更多地依靠代数表达式的形式演算，而不是几何．这种方法的最重要代表是 Euler，他拒绝把几何作为微积分的基础，并纯粹形式地研究函数，即从它们的代数（分析）表达式来论证．

他拒绝无穷小的概念，这里所谓的无穷小是指非零而又小于任何指定大小的量．在他 1755 年的《原理》中，他论证道[46]：

> 毫无疑问，任何一个量可减小到完全消失得无影无踪的程度．但是，一个无穷小量无非是一个正在消失的量，因而它本身就等于 0．这与无穷小的定义也是协调的，按照无穷小的定义，它应小于任一指定的量；它无疑应当就是无；因为除非它等于 0，否则总能给它指定一个和它相等的量，而这是与假设矛盾的．

由于 Euler 排除了微分，他就必须解释对他说来是 0/0 的 dy/dx 怎么能等于一个确定的数．对此，他象下面这样做：因为对任何数 n，有 $n\cdot 0=0$，所以 $n=0/0$．导数正是确定 0/0 的一个方便的途径．为了证明在有 dx 出现时可以丢掉 $(dx)^2$，Euler 说．

(46) *Opera*, (1) [illegible].

$(dx)^2$ 在 dx 之前消失，所以 $dx+(dx)^2$ 与 dx 之比应为 1. 他确实承认 ∞ 是一个数，例如他认为和 $1+2+3+\cdots$ 是一个数. 他也区分 ∞ 的阶. 例如 $a/0=\infty$, 而 $a/(dx)^2$ 是二阶无穷大，等等.

Euler 进而得到 $y=x^2$ 的导数. 他给 x 以增量 ω; 则 y 的增量就是 $\eta=2x\omega+\omega^2$, 而比 η/ω 就是 $2x+\omega$. 然后他说，当较小的 ω 被舍去，这个比值就趋近 $2x$. 然而，他强调说微分 η, ω 是绝对的 0, 由它们只能知道它们相互的比值最终化为一个有限值，此外推不出任何其他东西. 这样，Euler 不折不扣地接受了如下的说法：存在这样的量，它们本身是绝对的 0, 而它们的比值是有限数. 在«原理»第 3 章中，Euler 说了这个性质的更多"道理"，他在那里鼓励读者说：在导数中并没有隐藏通常想象的那么大的神秘性，而那种神秘性使许多人在心目中怀疑微积分.

作为 Euler 推理的另一个例子，我们看一下他在«原理»(1755)第 180 节中关于 $y=\log x$ 的微分的推导. 用 $x+dx$ 代替 x 得

$$dy=\log(x+dx)-\log x=\log\left(1+\frac{dx}{x}\right).$$

这里，他联想他的«引论»(1748)第一卷第七章中的结果：

$$\log_e(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots. \tag{57}$$

以 dx/x 代 z 得：

$$dy=\frac{dx}{x}-\frac{dx^2}{2x^2}+\frac{dx^3}{3x^3}-\cdots.$$

由于第一项后各项均消失了，我们有

$$d(\log x)=\frac{dx}{x}.$$

我们应该记住 Euler 的书是他那时候的标准课本. Euler 形式化方法的真正贡献是把微积分从几何解放出来，而使它建立在算术和代数的基础上. 这一步至少为基于实数系统的微积分的根本论证开辟了道路.

Lagrange 在1772年的一篇文章[47]以及在«解析函数论»[48]中作了重建微积分基础的最雄心勃勃的尝试. 他的书的小标题暴露了他的无知. 这个小标题是:"包含着微分学的主要定理, 不用无穷小、或正在消失的量、或极限与流数等概念,而归结为有限量的代数分析艺术."

Lagrange 批评 Newton 的方法时指出: 关于弦与弧的极限比, Newton 认为弦与弧不是在它们消失前或消失后相等,而是当它们消失时相等. 正如 Lagrange 正确地指出的:"此方法有很大不便,即它把所考虑的量在失却其为量的状态下, 仍看作是量; 因为虽则对两个量,只要它们还保持有限,就总可以适当地设想它们的比,但是,当它们一旦同时都变为无时, 它们的比在我们的头脑里就不再有清楚而确切的想法了."他说, Maclaurin 的«流数论»表明要证明流数法是何等困难. 他对 Leibniz 和 Bernoulli 的小零(即无穷小)及 Euler 的绝对零同样不满意,他说:所有这些,"虽然在现实中是对的,但作为一门科学的基础仍不够清楚,因为科学的确实性应基于它自身的证据."

Lagrange 想给微积分提供古人论证的全部严密性, 并且他提出要把微积分归结为代数,来做到这一点. 他所指的代数,正如我们前面所提到的, 包括作为多项式推广的无穷级数. 事实上, 对 Lagrange 来说, 函数论只是与函数的导数有关的代数的一部分. Lagrange 特别提倡使用幂级数. 他以适合于他的谦卑态度指出, Newton 没有想到这个方法是很奇怪的.

他当时希望使用这一事实: 任何一个函数 $f(x)$ 能表成这样:

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\cdots, \tag{58}$$

其中系数 p, q, r, $\cdots$含 x, 但与 h 无关. 然而,他希望在进一步研究之前确认这样的幂级数展开总是可能的. 他说,当然,这可以通

(47) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1772, pub. 1774=*Œuvres*, 3, 441～476.

(48) 1797; 2nd ed., 1813=*Œuvres*, 9.

过任何多个熟悉的例子来说明. 但他也的确承认有例外的情况. Lagrange 想到的例外情况有: $f(x)$的某些导数可变为无穷, 或者函数与导数都变为无穷. 这些例外只发生在一些孤立点上; 因此 Lagrange 不把它们计算在内. 他以类似的骑士风度来处理另一个困难. Lagrange 和 Euler 都毫无疑问地接受这样一点: 将函数展开成 h 的整数幂或分数幂的级数肯定是可能的, 但 Lagrange 希望排除对分数幂的需要, 他相信只有在$f(x)$中含根式时才会出现分数幂, 但他又把这种情况当作例外而不去理它, 因此他就立即处理(58)式.

Lagrange 用一个有点累赘, 但却是纯形式的论据断定: 正如能从$f(x)$得到 p 一样, 我们可以从 p 得到 $2q$, 并对(58)的其他系数 r, s, …也可得到类似结论. 因此如用$f'(x)$表示 p, 以$f''(x)$表示从$f'(x)$导出的函数(如同从$f(x)$导出$f'(x)$那样), 则

$$p=f'(x),\ q=\frac{1}{2!}f''(x),\ r=\frac{1}{3!}f'''(x),\ \cdots,$$

因此(58)就给出

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots.$$

这时, Lagrange 得出这样的结论: 最后这个"表达式具有优越性, 它清楚地显示出各项之间的相互依赖关系. 特别是, 只要知道怎样形成第一个导函数, 就可以照样形成级数中的其他导函数." 稍后, 他又补充道: "只要有了微分学的初步知识, 就会明白这些导函数正是 dy/dx, d^2y/dx^2, …."

Lagrange 还指出怎样由$f(x)$导出 p 或$f'(x)$. 在那里, 他用(58)式, 并忽略第二项以后的各项, 得$f(x+h)-f(x)=ph$. 他将两边同除以 h, 得出 $p=f'(x)$.

实际上, Lagrange 关于函数可展成幂级数的假定是一个系统性的弱点. 现在知道的关于这种可展性的各种判据都涉及到各阶导数的存在性. 但导数的存在性正是 Lagrange 想要避免的. 他

为幂级数辩护的论据只是使函数能否展开的问题更糊涂. 即使在函数可以展成级数时, 也只有能得到第一个导数(即 $f'(x)$)后, 才能用 Lagrange 所说的方法, 而这里 Lagrange 所作的正是他前人比较粗糙的东西的重复. 最后,实际上并未讨论级数(58)的收敛问题. 他倒的确指出了: 当 h 充分小时, 保留的最后一项比舍去的各项要大. 他在这本书里还给出了 Taylor 展开余项的 Lagrange 形式(第 20 章第 7 节), 但是它对上面的展开法不起作用. 尽管有这些弱点, Lagrange 探讨微积分的方法在相当长一段时期中受到很高的赞赏. 后来, 它被抛弃了.

Lagrange 相信他已省却了极限概念. 他确实承认[49]微积分可以在极限理论的基础上建立起来, 但是他说, 这种必须使用的抽象推理与分析精神无关. 尽管他的方法不妥, 但他确实象 Euler 那样, 为将分析的基础脱离几何与力学作出了贡献; 而且在这方面, 他的影响是决定性的. 虽则这种分离不是教学法所期望的, 因为它阻碍直观的了解, 但是它使逻辑的分析必须自立这一点变得很清楚.

近十八世纪末, 一个数学家、战士和行政管理人员 Lazare N. M. Carnot (1753～1823) 写了一本通俗的畅销书《关于无穷小分析的形而上学的思考》(*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797), 在这本书里, 他想使微积分精确化. 他试图证明逻辑是以穷竭法为依据的, 而处理微积分的全部方法只不过是简化或捷径, 把它们建立在穷竭法的基础上, 就能够给它们提供逻辑. 累加推敲之后, 他象 Berkeley 一样得出这样的结论: 微积分的通常论证中的错误是互相抵偿的.

在使微积分严密化的大量努力中, 有少数几个是路子对头的, 其中最有名的是 d'Alembert 的和再早一点的 Wallis 的工作. D'Alembert 相信 Newton 有正确的想法, 而他自己所作的只是解

(49) *Œuvres*, 1, 325.

释 Newton 的意思. 在著名的《科学、艺术和工艺的百科全书》(*Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts, et des Métiers*, 1751～1780)中, d'Alembert 在"微分"这个条目下写道: "Newton 从未把微分学当作无穷小量的计算, 而是作为最初比和最终比的方法, 即求出这些比的极限的一种方法. "但是 d'Alembert 把微分定义为"无穷小量或者至少小于任何给定值的量. "他是相信 Leibniz 的微积分能建立在微分三规则之上的; 然而他更喜欢把导数看成极限. 在关于极限的使用的研究中, 他也象 Euler 那样论证 0/0 可以等于任何量.

他在另一篇论文中说道: "极限, 极限论是微积分的真正抽象……, 它决不是微分学中的无穷小量的一个问题: 它独特地是有限量的极限问题. 这样, 无穷大和无穷小量. 它们相互间较大, 较小的空谈, 对微分学说来是全然无用的."无穷小仅仅是一种说法, 用以避免冗长的极限术语的描述. 事实上, d'Alembert 给出了极限的正确定义的一个很好的近似: 一个变量趋近一个固定量, 趋近的程度小于任何给定量; 虽则这里他也讲到变量永远达不到极限. 但他没有结合并利用他的基本正确思想作出微积分的形式阐述.

他在许多观点上仍然是含糊的; 例如他把曲线的切线定义为当割线与曲线的两个交点变成一个的时候割线的极限. 这种含糊性, 特别是他叙述极限概念时的含糊性, 使许多人怀疑一个变量能否达到它的极限. 由于没有明白而正确的表达, d'Alembert 告诫学习微积分的学生们: "坚持, 你就会有信心."

Sylvestre-François Lacroix(1765～1843)在他的著作《微积分学教程》(*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*)的第二版(1810～1819)中, 对两个量的比, 当其中每一个都趋近 0 时, 能趋近于一个作为极限的确定值这个问题有较明确的思想. 他给出了比 $ax/(ax+x^2)$, 并指出这个比与 $a/(a+x)$ 相同, 而 $a/(a+x)$ 当 x 趋近于 0 时趋近于 1. 进而, 他指出 1 是当 x 甚至通过负值趋于

0时的极限. 然而，他也说当分子与分母是0时的极限的比值这样的话，甚至还用0/0这个记号. 他确实引进用导数表示的函数$y=f(x)$的微分dy，即$dy=f'(x)dx$. 因此，若$y=ax^3$，则$dy=3ax^2dx$. 他第一次使用"微分系数"这个术语表示导数；于是$3ax^2$就是微分系数.

十八世纪的几乎每一个数学家都对微积分的逻辑作了一些努力，或至少是讲了一些这方面的话，虽则有一二个路子对头，但所有的努力都没有结果. 区别很大的数和无穷大"数"是很困难的. 当时，人们认为这样的结论似乎是很清楚的：对每一个n成立的定理，必须对n是无穷大也成立. 同样，差商可以被导数代替，有限项的和与积分也是很难区分的. 那时，数学家们在有限同无限情形之间随意通行. 1755年，Euler在《原理》中区分了函数的增量与该函数的微分，也区分了和与积分，但这种区分并未立即被大家采用. 十八世纪所有这方面的努力可以用Voltaire关于微积分的描述来概括：他把微积分描述为"计算和度量一个其存在性是不可思议的事物的艺术."

在几乎完全缺乏基础的情况下，数学家们怎么可能对各种函数进行演算呢？除了大大地依靠物理和直观的意义之外，他们思想上的确还有一个模型——较简单的代数函数，如多项式与有理函数等. 他们把他们在这些简单而具体的函数中发现的性质推广到所有的函数上去. 这些性质诸如：连续性、孤立的无穷大和不连续点的存在性，可展成幂级数，以及导数和积分的存在性等等. 在很大程度上，由于研究振动弦，他们被迫将函数概念（象Euler那样）推广到任何随意画出的曲线（例如Euler的混合函数、不规则函数或不连续函数），这时，他们不能再以较简单的函数为前导了. 而当对数函数必须推广到负数与复数时，他们实际上是在完全没有可靠基础的情况下工作的；这正是为什么那时对这类事情的争论很普遍的原因. 直到十九世纪前，微积分的严密化一直未完成.

参考书目

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.

Boyer, Carl B.: *The Concepts of the Calculus*, Dover (reprint), 1949, Chap. 4

Brill, A. & M. Nöther: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer and neuerer Zeit," *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893, 107～566.

Cajori, Florian: "History of the Exponential and Logarithmic Concepts," *Amer. Math. Monthly*, 20, 1913, 5～14, 35～47, 75～84, 107～117, 148～151, 173～182, 205～210.

Cajori, Florian: *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse*, Open Court, 1919.

Cajori, Florian: "The History of Notations of the Calculus," *Annals of Math.*, (2), 25, 1923, 1～46.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924, Vols. 3 and 4, relevant sections.

Davis, Philip J.: "Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function," *Amer. Math. Monthly*, 66, 1959, 849～869.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, B. G. Teubner and Orell Füssli, 1911～; see references to specific volumes in the chapter.

Fagnano, Giulio Carlo: *Opera matematiche*, 3 vols., Albrighi Segati, 1911

Fuss, Paul H. von: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 2 vols., 1843, Johnson Reprint Corp., 1967.

Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-mathematik," *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 61～171, 1956; also published separately by Institut de Mathématiques, Genéve, 1957.

Mittag-Leffler, G.: "An Introduction to the Theory of Elliptic Functions," *Annals of Math.*, (2), 24, 1922～1923, 271～351.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, A. Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 110～380.

Pierpont, James: "Mathematical Rigor, Past and Present," *Amer. Math. Soc. Bulletin*, 34, 1928, 23～53.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics*, 1200～1800, Harvard University Press, 1969, pp. 333～338, 341～351, 374～391.

20

无穷级数

读读 Euler, 读读 Euler, 他是我们大家的老师.

P. S. Laplace

1. 引 言

在十八世纪,甚至到今天,无穷级数一直被认为是微积分的一个不可缺少的部分. 实际上, Newton 研究级数是和他的流数法分不开的,因为对于稍为复杂一些的代数函数和超越函数,只有把它们展成无穷级数并进行逐项微分或积分,他才能处理它们. Leibniz 在他 1684 和 1686 年初期发表的一些文章中,也强调了"一般的或不定的方程". Bernoulli 们、Euler 以及他们同时代的人,都大量依靠级数的使用. 数学家们只是逐渐地,正如在上一章所指出的那样,学会用有尽的形式(也就是简单的分析表达式)来研究初等函数. 虽然如此,级数仍然是某些函数的唯一表达式,而且是计算初等超越函数的最有效的工具.

随着研究领域的逐渐扩展,数学家们运用无穷级数所取得的成功变得越来越多. 新概念中存在的困难,起码在一段时间里,是没有认识到的. 级数只是无穷多项式,并且也就当作多项式来处理. 此外,正如 Euler 和 Lagrange 所相信的,每个函数都能表为级数,似乎是显然的事.

2. 无穷级数的早期工作 无穷级数的早期工作

无穷级数在数学中是出现得很早的，出现的形式通常是公比小于1的无穷几何级数. Aristotle[1]就已认识到这种级数有和，无穷级数还散见在中世纪后期数学家的著作中，被用来计算变速运动的物体所走过的路程. 曾经研究过一些这类级数的 Oresme，在他的小册子《欧几里得几何问题》(*Quæstiones Super Geometriam Euclidis*, 约1360年)中，甚至证明了调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

是发散的，他用的正是今天的方法，就是代之以一个每项都较小的级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots,$$

并看出后者是发散的，因为我们能够得到要多少就有多少的括号，其中每一个的值都等于1/2. 然而，人们不应由此断言，Oresme 或一般数学家们，已经开始识别收敛级数与发散级数.

Vieta 在他的《各种各样的解答》(*Varia Responsa*, 1593, *Opera*, 347～435) 中给出了一个无穷几何级数的求和公式. 他从 Euclid 的《原本》知道，n 项和 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 可用

$$\frac{s_n-a_n}{s_n-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$$

给出. 这样，如果 $\frac{a_1}{a_2}>1$，则当 n 变为无穷时 a_n 趋向于0，所以

$$s_\infty=\frac{a_1^2}{a_1-a_2}.$$

十七世纪中叶，圣文森特的 Gregory 在他的《几何著作》

(1) *Physica*, Book III, Chap. 6, 206b, 3～33.

(1647)中，证明了 Achilles 追龟的悖论可以用无穷几何级数的求和来解决. 和是有限的这件事表明，Achilles 可以在一个确定的时间与地点追上乌龟. Gregory 第一次明白指出了无穷级数表示一个数，即级数的和. 他称这个数为级数的极限. 他说:“过程的结束就是级数的终点，即使延续到无穷，过程也永远达不到这个终点，但是它能够趋向于它并接近到任何给定的程度”. 他还有许多其他的不够准确和清楚的论述，但他对这个课题做出了贡献并影响了很多学生.

Mercator 和 Newton (第 17 章第 2 节)发现了级数

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots.$$

人们观察到，在 $x=2$ 时级数的值为无穷，而根据左边，它却应该取 $\log 3$. Wallis 注意到了这个困难，但不能解释它. Newton 得到了许多其他表示代数函数和超越函数的级数. 例如，在 1666 年，为了得到 $\arcsin x$ 的级数，他用了这样的事实(图 20.1)，面积 $OBC=\frac{1}{2}\arcsin x$, 故 $\frac{1}{2}\arcsin x=\int_0^x\sqrt{1-x^2}\,dx-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$. 他把右边展开为级数，逐项积分，并项，得到了结果. 他还得到了 $\arctan x$ 的级数. 在 1669 年的«分析学»中，他给出了 $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ 和 e^x 的级数. 这些级数中的某些是用从其他级数求逆的办法得到的，即把自变量作为应变量解出来. 他用的方法是粗糙的和归纳的. 虽然如此，Newton 对自己推导出了如此之多的级数还是感到莫大的欣慰.

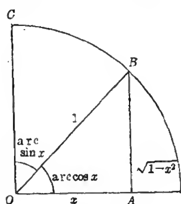


图 20.1

Collins 在 1669 年收到了 Newton 的«分析学»，并于 1670 年 12 月 24 日把级数方面的结果告诉了 James Gregory. Gregory 在 1671 年 2 月 15 日答复说(Turnbull, «通信» (*Correspondence*), 1,

52～58 和 61～64)，他得到了其他一些级数，其中包括

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots,$$

$$\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\frac{61}{720}x^6+\cdots.$$

他如何推导出这些级数是无从知道的. Leibniz 也在 1673 年大概独立地得到了 $\sin x$, $\cos x$ 和 $\operatorname{arc tg} x$ 的级数. 在微积分早期阶段，研究超越函数时用它们的级数来处理是所用方法中最富有成效的，也是 Newton 和 Leibniz 微积分工作的一个重要部分.

这些人和其他使用分数指数与负指数的二项式定理的人，为了得到很多级数，不仅不顾由于运用这些级数而产生的问题，甚至也没有证明二项式定理. 他们认为级数等于展成这个级数的函数是没有问题的.

James Bernoulli 在 1702 年[2] 推导出了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的级数. 用的方法是，他先把 $\sin n\alpha$ 按 $\sin\alpha$ 展开，然后让 α 趋向于 0 而 n 变成无穷，使得 $n\alpha$ 趋向于 x 而同时 $n\sin\alpha$ 即 $\frac{n\alpha\sin\alpha}{\alpha}$ 也趋向于 x. Wallis 在他的«代数» (1693) 的拉丁文版中指出，Newton 在 1676 年再次给出了这些级数; Bernoulli 看到了这句话，但未申明 Newton 的优先权; 此外，de Moivre 在 1698 年的«哲学汇刊»[3]中已给出了 Newton 结果的证明; 虽然 Bernoulli 在其他工作中用过并引证过这个杂志，但他并没有表明他是通过这渠道注意到 Newton 的工作的.

除了用于微积分之外，级数的主要应用之一在于计算一些特殊的量，如 π 和 e, 以及对数函数和三角函数. Newton, Leibniz, James Gregory, Cotes, Euler 和其他许多人，都是为了这个目的而对级数感兴趣的. 然而，有些级数收敛得这样慢，对于计算来说

(2) *Opera*, 2, 921～929.

(3) Vol. 20, 190～193.

几乎不能使用. 例如, Leibniz 在 1674 年得到了有名的结果[4]

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots.$$

但为了计算 π, 即使是达到 Archimedes 已经得到的精确度, 也得算 100000 项. 同样 $\log(1+x)$ 的级数收敛也十分慢, 必须取很多项才能达到小数点后几位的精确度. 有各种方法把这个级数变成收敛比较快的级数. 例如, James Gregory(《几何练习》, 1668)得到了

$$\frac{1}{2}\log\frac{(1+z)}{(1-z)}=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+\cdots,$$

并证明了它在计算对数中更有用. 把一个级数变成另一个收敛比较快的级数的问题, 在整个十八世纪有许多人继续研究过. 有一个这样的变换, 是属于 Euler 的, 我们将在第 4 节中给出.

级数还有另一应用, 是由 Newton 开始的. 给定一个隐函数 $f(x, y)=0$, 人们希望把 y 表为 x 的显函数. 这样的显函数可能有好几个, 例如在 $x^2+y^2-1=0$ 这个最简单的情形, 显然就是这样, 它有两个通过点(1, 0)的解 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. 在这简单的情形里, 两个解都能够表示为有尽的分析表达式. 但是, 一般说来, y 的每一个表达式都必须表为 x 的无穷级数. 当然, 这些级数并不一定是幂级数, 特别是, 在奇点 $(f_x=f_y=0)$ 处的展开式更是这样. Newton 在他的《流数法》中发表了决定这几个级数的形式的一个方法, 每一个显函数解就是这些级数之一. 他的方法(其中用到了有名的所谓 Newton 平行四边形)指出, 在形如

$$y=a_1x^m+a_2x^{m+n}+a_3x^{m+2n}+\cdots$$

的级数中, 如何决定前头几个指数. 然后, 这些级数的系数可以用待定系数法定出来. 事实上, Newton 也只是给出了一些特殊的例子, 人们只能从中推断他的方法.

(4) *Math. Schriften*, 5, 88~92; also *Acta Erud.*, 1682=*Math. Schriften*, 5, 118~122.

对每一个级数来说，决定指数的方法是很麻烦的. Taylor, James Stirling 和 Maclaurin 给出了一些法则；Maclaurin 还试图推广和证明这些法则，但未成功. Newton 方法的一个证明由 Gabriel Cramer 和 Abraham G. Kästner (1719～1800) 独立地给出。

3. 函数的展开

十七世纪后期和十八世纪，摆在数学家面前的问题之一是函数表的插值. 为了适应航海、天文学和地理学的进展，要求三角函数、对数函数和航海表的插值有较大的精确度. 插值(这个词是 Wallis 的)的常用方法叫线性插值法，因为它假设了在两个已知值之间的区间中，函数是自变量的线性函数. 然而，问题中的函数往往是非线性的，因而数学家感到需要有一种较好的插值方法.

我们将要叙述的方法，是 Briggs 在他的《对数的算术》(*Arithmetica Logarithmica*, 1624)中引进的，虽然关键的公式是由 James Gregory 在他 1670 年 11 月 23 日给 Collins 的信 (Turnbull, 《通信》1, 45～48) 中给出，并且 Newton 也独立地给出过. Newton 的工作出现在《原理》第 III 卷的引理 5 和《微分法》(*Methodus Differentialis*) 中，后者虽然出版于 1711 年，但却是 1676 年写成的. 用的方法叫做有限差方法，这是有限差计算的第一个重大的结果.

假设 $f(x)$ 是一个函数，它在 a, $a+c$, $a+2c$, $a+3c$, $\cdots$, $a+nc$ 上的值已知. 命

$$\Delta f(a)=f(a+c)-f(a),$$
$$\Delta f(a+c)=f(a+2c)-f(a+c),$$
$$\Delta f(a+2c)=f(a+3c)-f(a+2c),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

进一步令

$$\Delta^2 f(a)=\Delta f(a+c)-\Delta f(a),$$
$$\Delta^3 f(a)=\Delta^2 f(a+c)-\Delta^2 f(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

那末 Gregory-Newton 公式可以叙述为

$$(1)\qquad f(a+h)=f(a)+\frac{h}{c}\Delta f(a)+\frac{\frac{h}{c}\left(\frac{h}{c}-1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+\cdots.$$

Newton 粗略地给出了一个证明，而 Gregory 却没有.

为了计算 $f(x)$ 在已知值之间的任一 x 处的值，只需让 h 等于 $x-a$. 这样计算出来的值并不一定是函数的真值；公式计算出来的是 h 的一个多项式的值，这个多项式在特殊点 a, $a+c$, $a+2c$, …的值和函数的真值相同.

Gregory-Newton 公式还可用来逼近积分. 给定一个函数，譬如说 $g(x)$，要求积分，或者说，要找相应曲线下的面积. 我们用 $g(x)$ 的值得到 $g(a)$, $g(a+c)$, $g(a+2c)$, … 以及它们的差分和高阶差分；把这些值代到(1)中，那末(1)就给出了一个逼近 $g(x)$ 的多项式. 于是，正如 Newton 所指出的，由于多项式是很容易积分的，就得到了 $g(x)$ 的所求积分的一个逼近.

Gregory 还把(1)应用于函数 $(1+d)^x$. 他知道这个函数在 $x=0, 1, 2, 3, \cdots$ 上的值. 因此 $f(0)=1$, $\Delta f(0)=d$, $\Delta^2 f(0)=d^2$, 等等. 这样，在(1)中，让 $a=0$, $c=1$ 和 $h=x-0$，应用 $f(0)$, $\Delta f(0)$, …的值，他得到了

$$(2)\qquad (1+d)^x=1+dx+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}d^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3+\cdots.$$

这样，对于一般的 x, Gregory 得到了二项式的展开.

Gregory-Newton 内插公式由 Brook Taylor 发展成一个把函数展成无穷级数的最有力的方法. 二项式定理，有理函数的长除

法和待定系数法，都是有局限性的方法．Taylor 在他研究有限差计算的第一本出版物《增量法及其逆》(*Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, 1715) 中，推导出他在 1712 年曾经叙述过的定理，这定理至今仍用他的名字命名．他顺便称赞了 Newton，却没有提到 Leibniz 1673 年在有限差方面的工作，虽然 Taylor 是知道这些工作的．Taylor 定理在 1670 年就已经为 James Gregory 所知，大概稍后又为 Leibniz 独立地发现过；然而，这两个人都没有发表它．实际上，John Bernoulli 确曾于 1694 年在《教师学报》上发表了相同的结果；虽然 Taylor 知道这个结果，但并没有引证过它．他自己的"证明"是不一样的．他所做的相当于在 Gregory-Newton 公式中让 c 变成 Δx．这样一来，例如 (1) 的右边第三项就变成

$$\frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}. \tag{3}$$

Taylor 下结论说，当 $\Delta x=0$ 时，这一项就变成 $h^2f''(a)/2!$，从而整个 Gregory-Newton 公式变成

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2!}+f'''(a)\frac{h^3}{3!}+\cdots. \tag{4}$$

当然，Taylor 的方法是不严密的，他也没有考虑收敛问题．

Taylor 的定理在 $a=0$ 时就是现在所谓的 Maclaurin 定理．Maclaurin 继承 James Gregory 任爱丁堡的教授，在他的《流数论》(1742) 中给出了这个特殊情形，并说明这只是 Taylor 的结果的一个特殊情形．然而，历史上却把它作为一个独立的定理而归功于 Maclaurin．附带地说，Stirling 在 1717 年对代数函数，以及在他 1730 年的《微分法》(*Methodus Differentialis*) 中对一般函数，也给出了这个特殊情形．

Maclaurin 是用待定系数法证明他的结果的．他进行如下．令

$$f(z)=A+Bz+Cz^2+Dz^3+\cdots, \tag{5}$$

那末

$$f'(z)=B+2Cz+3Dz^2+\cdots,$$
$$f''(z)=2C+6Dz+\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在每个等式中令 $z=0$，就定出 $A, B, C, \cdots$. 他并没有为收敛问题担心，而直接去应用结果.

4. 级数的妙用

James Bernoulli 和 John Bernoulli 在级数方面做了大量工作. James 在 1689 到 1704 年间，写了五篇论文，他侄子 Nicholas (1695～1726) (John 的儿子)把它们作为 James 的《推想的艺术》(*Ars Conjectandi*, 1713)的附录发表. 这些论文中的大多数是专论使用函数的级数表示的，其目的是求函数的微分和积分，以及求曲线下的面积和曲线的长度. 尽管这些应用是对微积分的重大贡献，但没有什么特别新的思想. 然而，他用来求级数和的某些方法却是值得注意的，因为它们说明了十八世纪数学思想的特征.

在第一篇论文(1689)中[5]，他从级数

$$N=\frac{a}{c}+\frac{a}{2c}+\frac{a}{3c}+\cdots \tag{6}$$

出发，由此得到

$$N-\frac{a}{c}=\frac{a}{2c}+\frac{a}{3c}+\frac{a}{4c}+\cdots. \tag{7}$$

他现在从(6)减去(7)；在这个过程中，(7)的右边的每一项都从位于它上面的那一项减去. 这就得到

$$\frac{a}{c}=\frac{a}{1\cdot 2c}+\frac{a}{2\cdot 3c}+\frac{a}{3\cdot 4c}+\cdots. \tag{8}$$

(5) *Opera*, 1, 375～402.

这是一个正确的结果，但推导却是错误的，因为原来的级数发散. James 说，这种做法是有问题的，如果不慎重是不能用的.

接着他考虑通常的调和级数，并证明它的和是无穷[6]. 他考虑这样的项

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}, \tag{9}$$

并说这个和大于 $(n^2-n)\cdot\frac{1}{n^2}$，因为这里有 n^2-n 项，而每一项至少同最后一项一样大；但是

$$(n^2-n)\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{n}.$$

因此，如果在(9)中加上 $\frac{1}{n}$，就有

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2}>1.$$

他说，这样我们可以把项一组接一组地归并起来，使得每一组的和大于1. 这样一来，我们能够得到有限多个项，其和要多大就有多大；从而整个级数的和必须是无穷. 由此，他还指出，"最后"一项消失的一个无穷级数，它的和可以是无穷. 这是和他早期的信念，也是和十八世纪包括 Lagrange 在内的许多数学家的信念相矛盾的.

在这之前，John Bernoulli 曾给出过调和级数有无穷和的一个不同的"证明". 它是这样的：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{2}{2\cdot3}+\frac{3}{3\cdot4}+\frac{4}{4\cdot5}+\cdots\\&=\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\right)\\&\quad+\left(\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{4\cdot5}+\cdots\right)+\cdots.\end{aligned} \tag{10}$$

(6) *Opera*, 1, 392.

现在,应用(8),令其中的a和c为1,从(10)我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\\&\quad=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\\&\qquad+\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\\&\quad=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.\end{aligned}$$

如果我们设$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$,我们就已经证明了$A=1+A$. 假如$A$为有穷,这结果就会是不可能的.

在接着的四篇论述级数的短文中,James Bernoulli 如此无拘无束地做了许多事,以致使人难以相信他曾认识到必须谨慎地处理无穷级数. 例如,在第二篇短文(1692)中[7],他作了如下的讨论:从几何级数的公式我们有

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2.$$

两边乘$\frac{1}{3}$,有

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots=\frac{2}{3};$$

原来级数两边乘$\frac{1}{5}$,有$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\cdots=\frac{2}{5}$,等等. 左边加起来就是整个调和级数,应等于右边的和,即

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots&=2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots\\&=2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\right).\end{aligned}$$

因此,奇数项的和等于调和级数和的一半,从而$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$也是调和级数的$\frac{1}{2}$. 故

(7) *Opera*, 1, 517～542.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots.$$

在第三篇短文(1696)中[8]，他写道

$$\frac{l}{m+n}=\frac{l}{m}\left(1+\frac{n}{m}\right)^{-1}=\frac{l}{m}-\frac{ln}{m^2}+\frac{ln^2}{m^3}-\cdots;$$

当 $m=n$ 时，

$$\frac{l}{2m}=\frac{l}{m}-\frac{l}{m}+\frac{l}{m}-\cdots, \tag{11}$$

他把此式说成是一个不无风趣的悖论.

在他关于级数的第二篇文章中，他把级数的一般项用另外两项之和或差来代替，然后作另外一些可以导致特殊结果的运算.这种替换，对绝对收敛的级数，是可行的，但对条件收敛的级数，就不对了．因此他得到一些错误的结果，这种错误的结果他也说成是悖论.

James 的非常有趣的结果之一是处理自然数 n 次幂倒数的级数，即 $1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$. James 证明了，奇数项的和与偶数项的和之比等于 2^n-1 比 1．这对 $n\geqslant 2$ 是正确的．然而，James 却毫不犹豫地把它用到 $n=1$ 和 $n=\frac{1}{2}$ 的情形．他发现最后这个结果是自相矛盾的.

在级数方面 James 的另一结果是，级数 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots$ 的和是无穷，因为它的每一项都大于调和级数的对应项．在这里他成功地用了比较判别法.

在(11)中，当 l 与 m 为 1 时所产生的级数，即

$$1-1+1-1+1-1+\cdots, \tag{12}$$

引起了极大的讨论与争议．如果把级数写成

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots, \tag{13}$$

(8) *Opera*, 2, 745～764.

就好象很明显，它的和应该为0. 可是，如果把级数写成

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots,$$

它的和也好象很明显应该是1. 然而，如果我们把级数(12)的和表为S，则$S=1-S$，从而$S=\frac{1}{2}$；事实上这就是(11)中Bernoulli的结果. Guido Grandi(1671～1742)，是比萨大学的数学教授，在他的小书《圆和双曲线的求积》(*Quadratura Circuli et Hyperbolae*, 1703)中，用另外的方法得到了第三个结果. 他在表达式

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots \tag{14}$$

中，令$x=1$，得到

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots.$$

Grandi因此主张级数(12)的和是$\frac{1}{2}$. 他还表示，由于级数(12)在形式(13)下的和是0，他业已证明，世界能够从空无一物创造出来.

在给Christian Wolf(1678～1754)的、发表在《学报》[9]上的一封信中，Leibniz也研究过级数(12). 他同意Grandi的结果，但认为不用他的论证也能得到这个结果. 事实上，Leibniz认为，如果取级数的第一项，前两项的和，前三项的和，前四项的和等等，就得到1, 0, 1, 0, …. 在这里，取1和0的可能率是相等的；因此必须取算术平均作为和，因为这个算术平均是最有可能取到的值. 这个解答为James和John Bernoulli, Daniel Bernoulli，以及我们将要看到的，也为Lagrange所接受. Leibniz承认，在他的论证中，形而上学的成分多于数学的成分. 但他接着说，在数学中，有比我们通常承认的更为形而上学的真理. 然而，他受Grandi论

(9) *Acta Erud. Supplementum*, 5, 1713, 264～270=*Math. Schriften*, 5, 382～387.

证的影响可能比他自己意识到的要多得多．因为，在后来的通信中，当 Wolf 希望把 Leibniz 这种可能率的论证方法推广，从而断言

$$1-2+4-8+16-\cdots=\frac{1}{3},$$

$$1-3+9-27+81-\cdots=\frac{1}{4}$$

时，Leibniz 表示异议．他指出，有和的级数要有单调下降的项，而(12)至少是带有单调下降的项的级数的极限，这一点由(14)让 x 从小于 1 的值趋向于 1 来看是显然的．

级数方面的真正广阔的工作是 1730 年左右从 Euler 开始的，他对这个课题感到莫大的兴趣，但在他的思想中有很大的混乱．为了求

$$1-1+1-1+1-\cdots$$

的和，Euler 主张，由于

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots, \tag{15}$$

当 $x=-1$ 时，

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots, \tag{16}$$

因此和是 $\frac{1}{2}$.

又当 $x=-2$ 时，(15)表明

$$\frac{1}{3}=1-2+2^2-2^3+\cdots, \tag{17}$$

因此，右边的级数的和是 $\frac{1}{3}$. 作为第三个例子，由于

$$\frac{1}{(1+x)^2}=(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots, \tag{18}$$

对 $x=1$ 就得到

$$\frac{1}{4}=1-2+3-4+\cdots.$$

再由

$$\frac{1-x}{(1+x)^2}=(1-x)(1+x)^{-2}=1-3x+5x^2-7x^3+\cdots,$$

取 $x=1$ 我们就有

(19) $$0=1-3+5-7+\cdots.$$

在他的著作中有大量这种推理的例子.

从(18),当 $x=-1$ 时,我们看到

(20) $$\infty=1+2+3+4+5+\cdots,$$

这是 Euler 接受了的. 进一步,在(15)中,令 $x=2$, 我们看到

(21) $$-1=1+2+4+8+\cdots.$$

由于(21)的右边应超过(20)的右边,所以 $1+2+4+8+\cdots$ 的和应该超过 ∞. 根据(21),它却是 -1. Euler 断言,∞ 必须是介于正数和负数之间的一种极限,在这点上和 0 相似.

关于(19),Nicholas Bernoulli (1687～1759) 在 1734 年给 Euler 的一封信上说,这个级数 $1-3+5-7+\cdots$ 的和是 $-\infty(-1)^{\infty}$. 他说,Euler 的等于 0 的结果,是一个无法解决的矛盾. Bernoulli 还注意到,在(15)中,当 $x=2$ 时,我们有

$$-1=1+2+4+8+\cdots;$$

而在

(22) $$\frac{1}{1-x-x^2}=1+x+2x^2+3x^3+\cdots$$

中取 $x=1$, 得到

$$-1=1+1+2+3+4+\cdots.$$

这两个不同的级数都给出 -1 这一事实,也是一个无法解决的矛盾. 否则,我们就可以认为这两个级数相等.

在一篇文章中,Euler 确曾指出过,级数只有对那些使它收敛的 x 值才能应用. 但是就在这同一篇文章[10]中,他却断言

(10) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1739, 116～127, pub. 1750=*Opera*, (1), 14, 350～363.

$$\cdots+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1+x+x^2+x^3+\cdots=0. \tag{23}$$

他的论证是

$$\frac{x}{1-x}=x+x^2+x^3+\cdots$$

和

$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots.$$

但两式左边相加为 0, 而两式右边相加就是级数(23)。

在一篇较早的文章中[11], Euler 从级数

$$y=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \tag{24}$$

或

$$1-\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3!y}-\frac{x^5}{5!y}+\cdots=0 \tag{25}$$

出发. 把代数的考虑用到(25)上,把它看成一个无穷次的多项式,并用代数方程根与系数关系的定理, Euler 证明了[12]

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96},$$

$$\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\cdots=\frac{5\pi^5}{1536},$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

在同一篇文章里,他第一次给出了乘积展开

(11) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 123～134, pub. 1740=*Opera*, (1), 14, 73～86.

(12) 直到 1739 年,对于 π 他一直用符号 p; π 是在 1706 年由 William Jones 引入的。

$$(26)\qquad \sin s=\left(1-\frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots.$$

他的论据仅仅是：$\sin s$ 有零点 $\pm\pi$，$\pm 2\pi$，…（他放弃了 0 这个根），类似于每个多项式对于每个根都必有一个一次因式一样，因此(26)成立.（在1743[13]年，以及在他的«引论»[14]中，为了回答批评，他给出了另外的推导.）他把(26)的右边看成一个多项式，令它等于零，并再次应用根与系数的关系，他导出了

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90},$$

以及分母是更高的偶数幂时的类似和.

在以后的一篇文章[15]中，Euler 得到了他的最优美的成果之一

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{2n}}=(-1)^{n-1}\frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}B_{2n},$$

其中 B_{2n} 是 Bernoulli 数（看后面）. 这与 Bernoulli 数的联系，是 Euler 稍后在他 1755 年的«原理»中才真正建立的[16]. 在 1740 年的文章中，他还给出了当 n 是前面几个小奇数时 $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^n}$ 的和，但对于所有的奇数 n，他没有给出一般的表达式.

Euler 还研究过调和级数，即这样的级数，它的项的倒数构成算术级数. 特别地，他表明[17]，如何能用对数函数来求原来调和级数的有限多个项的和. 首先，他从

(13) *Opera*, (1), 14, 138～155.

(14) *Opera*, (1), 8, 168.

(15) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 12, 1740, 53～96, pub. 1750=*Opera*, (1), 14, 407～462.

(16) Part II, Chap. 5, ¶124=*Opera*, (1), 10, 327.

(17) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 150～161, pub. 1740=*Opera*, (1), 14, 87～100.

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+\cdots \tag{27}$$

出发，于是

$$\frac{1}{x}=\log\left(\frac{x+1}{x}\right)+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{4x^4}-\cdots.$$

代入 $x=1, 2, 3, \cdots, n$，就给出

$$\frac{1}{1}=\log 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots,$$

$$\frac{1}{2}=\log\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}-\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1}{5\cdot 32}+\cdots,$$

$$\frac{1}{3}=\log\frac{4}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}-\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{4\cdot 81}-\frac{1}{5\cdot 243}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n}=\log\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}-\frac{1}{5n^5}+\cdots.$$

相加，并注意到每一个对数项都是两个对数之差，就得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}&\\ =\log(n+1)&+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\ &-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3}\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{n^4}\right)-\cdots,\end{aligned}$$

或

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\log(n+1)+C, \tag{28}$$

其中 C 表示无穷多个有限算术和的和. Euler 近似地计算过 C 的值(它依赖于 n, 但当 n 很大时 n 的值并不怎么影响计算的结果)，并得到 0.577218. 这个 C 就是现在通称的 Euler 常数, 用 γ 表示. γ 的一个更精确的表示，今天是如下得到的. 从(28)的两边减

去 $\log n$. 而 $\log(n+1)-\log n=\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, 当 $n\to\infty$ 时它趋向于 0. 因此

$$(29)\qquad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

附带说一下，对于 Euler 常数，没有发现比(29)更简单的形式了，而对于 π 和 e 我们却有许多不同的表达式. 不仅如此，到今天我们还不知道 γ 是有理数还是无理数.

Euler 在他的«论发散级数»(18)中研究了发散级数

$$(30)\qquad y=x-(1!)x^2+(2!)x^3-(3!)x^4+\cdots.$$

形式上，这个级数满足微分方程

$$(31)\qquad x^2y'+y=x.$$

但这个微分方程有积分因子 $x^2e^{-1/x}$, 因此

$$(32)\qquad y=e^{1/x}\int_0^x\frac{e^{-1/t}}{t}\,dt$$

是一个解，还可以用 l'Hospital 法则证明它和 x 一起趋向于 0. Euler 把级数(30)看成函数(32)的级数展开，而把 (32) 作为级数(30)的和. 事实上，令 $x=1$, 就得到

$$1-1+2!-3!+4!-\cdots=e\int_0^1\frac{e^{-1/t}}{t}\,dt.$$

关于级数(30)的值得注意的事实是，它可以用来作函数(32)的数值计算，因为给定一个 x 值，如果我们从某一项开始忽略后面的所有项，那末可以证明，余项的绝对值小于所忽略的第一项的绝对值. 因此，这个级数可以用来作为积分的很好的数值逼近. Euler 使用发散级数的方式显示了它的优点. 这些对发散级数所取得的成就的全部意义，在后来的 150 年里并没有被人赏识(看第47章).

还要指出 Euler 关于级数积分的另一个有名的结果. James Bernoulli 在«推想的艺术»中，在研究概率的课题时，引入了现在

(18) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 205～237, pub. 1760=*Opera*, (1), 14, 585～617.

已用得很广的 Bernoulli 数. 他找出了一个求整数的正整数次幂之和的公式,并且不加证明地给出了下面的公式:

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3\cdot 4} B_4 n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} B_6 n^{c-5} + \cdots, \tag{33}$$

这个级数加到 n 的最后一个正幂截止. B_2, B_4, B_6, …是 Bernoulli 数:

$$B_2 = \frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_6 = \frac{1}{42},\quad B_8 = -\frac{1}{30},\quad B_{10} = \frac{5}{66},\ \cdots. \tag{34}$$

Bernoulli 还给出了可以计算这些系数的递推公式.

Euler 的结果, 即 Euler-Maclaurin 求和公式, 是一个推广[19]. 设 $f(x)$ 是实变量 x 的一个实值函数. 那末(用现代的记号)这个公式就是

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(0)] + \frac{B_4}{4!}[f'''(n) - f'''(0)] + \cdots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)] + R_k, \tag{35}$$

其中

$$R_k = \int_0^n f^{(2k+1)}(x) P_{2k+1}(x) dx. \tag{36}$$

这里 n 与 k 是正整数, P_{2k+1} 是 $2k+1$ 阶 Bernoulli 多项式(它也出现在 Bernoulli 的《推想的艺术》中), 由下式给出:

(19) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 68~97, pub. 1738 = *Opera*, (1), 14, 42~72; 和 *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 147~158, pub. 1741 = *Opera*, (1), 14, 124~137.

$$(37)\quad P_k(x)=\frac{x^k}{k!}+\frac{B_1}{1!}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{B_2}{2!}\frac{x^{k-2}}{(k-2)!}+\cdots+\frac{B_k}{k!},$$

其中 $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_{2k+1}=0$, $k=1, 2, \cdots$. 级数

$$(38)\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]$$

对几乎所有在应用中出现的 $f(x)$ 都是发散的. 然而, 余项 R_k 小于所忽略的第一项,所以级数(35)给出

$$\sum_{i=0}^{n}f(i)$$

的一个有用的逼近.

Bernoulli 数 B_i 现在常常用后来由 Euler 给出的一个关系来定义[20],这就是

$$(39)\quad t(e^t-1)^{-1}=\sum_{i=0}^{\infty}B_i\frac{t^i}{i!}.$$

独立于 Euler, Maclaurin[21] 得到同样的求和公式(35), 所用的方法的确实性稍好一些, 离我们今天用的方法更近一些. 余项是由 Poisson 首先加上去并加以认真研究的[22].

Euler 又引进了[23]一个至今还为人们所习知和使用的级数变换. 给定一个级数 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$, 他把它写成 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n$. 通过一系列形式的代数步骤,他证明了

$$(40)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^na_0}{2^{n+1}},$$

其中 Δ^n 表示 n 阶有限差分(第 3 节). 这个变换的好处,用现代的说法,就是把一个收敛级数转换成一个收敛比较快的级数. 然而,对惯常并不区别级数的收敛与发散的 Euler 来说, 这个变换还可

(20) *Opera*, (1), 14, 407～462.
(21) *Treatise of Fluxions*, 1742, p. 672.
(22) *Mém. de l'Acad. des Sci., Inst. France*, 6, 1823, 571～602, pub. 1827.
(23) *Inst. Cal. Diff.*, 1755, p. 281.

以把发散级数变成收敛级数. 如果我们把(40)用到

$$1-1+1-1+\cdots, \tag{41}$$

(40)的右边便得到 $\frac{1}{2}$. 同样, 对于级数

$$1-2+2^2-2^3+2^4-\cdots, \tag{42}$$

(40)给出

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n=\frac{1}{2}(1)+\frac{1}{4}(-1)+\frac{1}{8}(1)+\frac{1}{16}(-1)\cdots=\frac{1}{3}. \tag{43}$$

自然, 这些结果和 Euler 以前得到的相同, 以前他用的方法是把级数的和取作导出这个级数的函数的值(看[16]或[17]).

Euler 方法的精神应该是清楚的. 他是一个伟大的巧匠, 他指出了一条通向数以千计的、以后可以严密建立起来的结果的途径.

必须提到另外一个著名的级数. James Stirling 在他的«微分法»[(24)]中给出了一个级数, 今天我们把它写成

$$\log n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\log\sqrt{2\pi}+\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}+\frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots, \tag{44}$$

它等价于

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\exp\left[\frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{n}+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k-1)(2k)}\frac{1}{n^{2k-1}}+\cdots\right]. \tag{45}$$

Stirling 给出了前五个系数, 并给出了一个决定后面系数的递推公式. 虽然, $\log n!$ 的级数是发散的, 但 Stirling 却只用了级数的前几项, 就算出了 $\log_{10}(1000!)$ 等于 2567 加上一个准确到小数点后十位的小数. De Moivre 在 1730 年(«分析杂论», *Miscellanea Ana-*

(24) 1730, p. 135.

lytica)给出了一个类似的公式. 对很大的 n, $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$; 这虽然是 de Moivre 给出的, 但却叫做 Stirling 逼近.

5. 三角级数

十八世纪的数学家还广泛研究了三角级数, 特别是在他们的天文学理论中. 这种级数在天文学中之所以有用, 显然是由于它们是周期函数, 而天文现象大都是周期的. 这种研究是一个广泛课题的开始, 而这课题的全部深刻意义在十八世纪还没有意识到. 开始使用三角级数的问题是插值问题, 特别是要确定行星在介于观测到的位置之间的位置. 这类级数在偏微分方程的早期工作中也曾用到(看第22章), 但奇怪的是这两条思路却一直分开, 甚至对同时研究两类问题的人也是这样.

三角级数是指形如

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{46}$$

的任一级数, 其中 a_n 和 b_n 是常数. 如果这样一个级数表示一个函数 $f(x)$, 那末对于 $n=0, 1, 2, \cdots$, 就有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{47}$$

这些系数公式的获得是这理论的主要结果之一, 至于这些 a_n 和 b_n 的值, 要在什么条件下才确实由上式给出, 现在且一概从略.

早在 1729 年, Euler 已经着手研究插值问题; 这就是, 已知一个函数 $f(x)$ 在 $x=n$ 处的值, 其中 n 是正整数, 求 $f(x)$ 在其他 x 处的值. 在 1747 年, 他把他已经得到的方法用到行星扰动理论中出现的一个函数上, 得到了函数的三角级数表示. 在 1753 年[25], 他发表了他在 1729 年发现的方法.

(25) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1750/1751, 36～85, pub. 1753 = *Opera*, (1), 14, 463～515.

首先，他处理这样的问题，已知条件是：对每一 n，$f(n)=1$，而要求一个周期解，对于整数 x，它的值为 1. 他的推理很有趣，因为它反映出那个时期的分析学. 他令 $f(x)=y$，用 Taylor 定理写出

$$(48)\qquad f(x+1)=y+y'+\frac{1}{2}y''+\frac{1}{6}y'''+\cdots.$$

由于 $f(x+1)$ 等于 $f(x)$，y 必须满足无穷阶的线性微分方程

$$(49)\qquad y'+\frac{1}{2}y''+\frac{1}{6}y'''+\cdots=0.$$

这时，他运用他在 1743 年(看第 21 章)发表的解有限阶线性常微分方程的方法. 这就是，他建立辅助方程

$$(50)\qquad z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{6}z^3+\cdots=0.$$

注意到 e 的级数，这方程就是

$$e^z-1=0.$$

然后，他求这个方程的根. 他从方程

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=1$$

出发，这是一个 n 次多项式. 根据 Cotes (1722) 的一个定理(这个定理 Euler 在他的《引论》[26]中也独立地证明过)，这个多项式有一次因子 z 和平方因子

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^2-2\left(1+\frac{z}{n}\right)\cos\frac{2k\pi}{n}+1,\quad k=1,2,\cdots,<\frac{n}{2}.$$

应用联系 $\sin z$ 和 $\cos 2z$ 的三角恒等式，这些因子等于

$$4\left(1+\frac{z}{n}\right)\sin^2\frac{k\pi}{n}+\frac{z^2}{n^2}.$$

如果我们用 $4\sin^2\frac{k\pi}{n}$ (对相应的 k)除每一个因子，(50)的根不受影响，这样平方因子就是

(26) Vol. 1, Chap. 14.

$$1+\frac{z}{n}+\frac{z^2}{4n^2\sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

当 $n=\infty$ 时，$\frac{z}{n}$ 为 0. 用 $\frac{k\pi}{n}$ 代替 $\sin\frac{k\pi}{n}$，因子就变成

$$1+\frac{z^2}{4k^2\pi^2}.$$

辅助方程(50)的每一个这样的因子都有对应的根 $z=\pm i2k\pi$，从而有对应于(49)的积分

$$\alpha_k\sin 2k\pi x+A_k\cos 2k\pi x.$$

上面提到的一次因子 z 导致一个积分常数. 由于 $f(0)=1$ 是一个初始条件，Euler 最后得到

$$y=1+\sum_{k=1}^{\infty}\{\alpha_k\sin 2k\pi x+A_k(\cos 2k\pi x-1)\}.$$

系数 α_k 和 A_k，还得根据条件 $f(n)=1$ (对每个 n)而定.

这篇文章还包含一个结果，其形式和现在所谓的任意函数的 Fourier 展开是一样的，即用积分来决定系数. Euler 特别地证明了函数方程

$$f(x)=f(x-1)+X(x)$$

的通解是

$$f(x)=\int_0^x X(\xi)d\xi+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2n\pi x\int_0^x X(\xi)\cos 2n\pi\xi d\xi$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n\pi x\int_0^x X(\xi)\sin 2n\pi\xi d\xi.$$

这里，在 1750～1751 年，我们已有了一个展成三角级数的函数. Euler 还主张，他的解是插值问题的最一般的解. 如果真的如此，它一定包含了用三角级数来表示多项式. 但是，我们在第 22 章将要看到，Euler 在关于弦振动和有关问题的论述中否认了这一点.

在 1754 年，d'Alembert[27]研究了这样的问题，就是把两个行星间距离的倒数，展开为原点到行星的两条射线间的夹角的余弦级数，这里也能够找到 Fourier 级数的系数的定积分表示.

Euler 在另一工作中，以完全不同的形式，得到了函数的三角级数表示[28]. 他从几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos x+i\sin x)^n, \quad i=\sqrt{-1}$$

出发，求和，得到

$$\frac{1}{1-a(\cos x+i\sin x)}.$$

然后他应用以 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 代替 $\cos x$ 和 $\sin x$ 的幂的标准公式(相当于 de Moivre 的公式)，得到

$$\frac{1}{1-a(\cos x+i\sin x)}=\sum_{n=0}^{\infty} a^n(\cos nx+i\sin nx).$$

在左边，分子分母同乘以分母的共轭复数，在右边，分出 $n=0$ 的项并移至左边，分离实部与虚部，他得到

$$\frac{a\cos x-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty} a^n\cos nx,$$

$$\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}=\sum_{n=1}^{\infty} a^n\sin nx.$$

至此，他的结果并不令人吃惊. 现在他让 $a=\pm 1$，得到，例如

$$(51)\qquad \frac{1}{2}=1\pm\cos x+\cos 2x\pm\cos 3x+\cos 4x\pm\cdots.$$

(实际上，这个级数是发散的.)他然后积分，从而得到

$$(52)\qquad \frac{\pi-x}{2}=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots$$

---

(27) *Recherches sur différens points importans du système du monde*, 1754, Vol. II, p. 66.

(28) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 164～204, pub. 1760=*Opera*, (1), 14, 542～584; 对另一方法，也参看 *Opera*, (1), 15, 435～497.

(它对 $0<x<\pi$ 成立,在 $x=0$ 与 π 它等于0)和

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\cdots \tag{53}$$

(它在 $-\pi<x<\pi$ 收敛). 积分后一个等式,为了定出积分常数,在 $x=0$ 计算函数值,得到

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{4}=-\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{16}\cos 4x-\cdots. \tag{54}$$

Euler 相信, 后面两个级数[它们在 $-\pi<x<\pi$ 是收敛的]对所有的 x 值分别表示了左边的函数. 然而,继续微分(51), Euler 推导出了

$$\sin x\pm 2\sin 2x+3\sin 3x\pm\cdots=0,$$

$$\cos x\pm 4\cos 2x+9\cos 3x\pm\cdots=0$$

和其他这类等式. Daniel Bernoulli 也曾给出过(52), (53), (54)这样一类表示式, 他认为, 级数只是在 x 值的某些区间上表示这些函数.

在1757年, 由于研究因太阳而引起的摄动, Clairaut[29]采取了一个大胆得多的步骤. 他说,他将把任何一个函数写成形式

$$f(x)=A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx. \tag{55}$$

他把问题看作一个插值问题,因此用到函数在 x 为

$$\frac{2\pi}{k},\ \frac{4\pi}{k},\ \frac{6\pi}{k},\ \cdots$$

时的值,经过某种处理以后得到

$$A_0=\frac{1}{k}\sum_{\mu}f\left(\frac{2\mu\pi}{k}\right),$$

$$A_n=\frac{1}{k}\sum_{\mu}f\left(\frac{2\mu\pi}{k}\right)\cos\frac{2\mu n\pi}{k}.$$

(29) *Hist. de l'Acad. des Sci.*, Paris, 1754, 545 ff., pub. 1759.

让 k 变成无穷，Clairaut 就得到了

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \tag{56}$$

这是 A_n 的正确公式.

Lagrange 在他对声的传播的研究中[30]，得到了级数(51)，并为它的和是 $\frac{1}{2}$ 进行辩护. 无论 Euler，还是 Lagrange，都没有评论过这样一件惊人的事实，这就是他们已经把一个非周期函数表示成三角级数的形式. 但是稍后，他们在别的地方确实观察到了这个事实. D'Alembert 经常拿 $x^{2/3}$ 作为一个不能展成三角级数的函数的例子. Lagrange 在 1768 年 8 月 15 日的一封信[31]中对他说明，$x^{2/3}$ 真的能够表示成形式

$$x^{2/3}=a+b\cos 2x+c\cos 4x+\cdots.$$

D'Alembert 表示反对并给出相反的论证，譬如说两边的微商在 $x=0$ 就不相等. 还有，用 Lagrange 的方法，人们可以把 $\sin x$ 表成余弦级数；但 $\sin x$ 是奇函数，而右边却是偶函数，这个问题在十八世纪一直没有解决.

在 1777 年[32]，Euler 在研究天文问题的时候，实际上用三角函数的正交性得到了三角级数的系数，这方法就是我们今天所用的. 就是说，从

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l} \tag{57}$$

他推导出

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(s)\cos\frac{k\pi s}{l}ds.$$

在这篇文章前的一篇文章里，他先用稍为复杂的方式得到这个结

(30) *Misc. Taur.*, 1, 1759=*Œuvres*, 1, 110.

(31) *Lagrange, Œuvres*, 13, 116.

(32) *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1793, 114～132, pub. 1793=*Opera*, (1), 16, Part 1, 333～355.

果，后来他发现可以直接得到它，就是把(57)的两边乘以 $\cos\frac{\nu\pi x}{l}$，逐项积分，并应用关系式

$$\int_0^l \cos\frac{\nu\pi x}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx=\begin{cases}0 & \text{如果 } \nu\neq k,\\ \frac{l}{2} & \text{如果 } \nu=k\neq 0,\\ l & \text{如果 } \nu=k=0.\end{cases}$$

上面关于三角级数的全部工作，处处都渗透了这样一个矛盾现象：虽然当时正在进行着把所有类型的函数都表示成三角级数，而 Euler、d'Alembert、Lagrange 却始终没有放弃过这样的立场，即认为并非任意的函数都可以用这样的级数表示．这个矛盾的部分解释是：在三角级数被认为是成立的那些地方，总有其他的论据，在某些情况下是物理的论据，似乎能够保证它们的成立．因此，人们就可以随意假设级数，并推导出系数公式．是否任意函数都能用三角级数表示的争论，就成了人们注意的中心了．

6. 连　分　式

我们曾经指出过(第13章第2节)，用连分式可以得到无理数的逼近．Euler 研究过这个课题．在他论述这个问题的第一篇题为"连分式"的文章[33]中，他得到一组有趣的结果，例如，每一个有理数都能表示为一个有限的连分式．然后他给出了表达式

$$e-1=1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots$$

和

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\frac{1}{6+}\,\frac{1}{10+}\,\frac{1}{14+}\cdots.$$

前者曾经在1714年《哲学年刊》Cotes 的一篇文章中出现过．Euler

(33) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1737, 98～137, pub. 1744＝*Opera*, (1), 14, 187～215.

实质上还证明了 e 和 e^2 是无理数.

连分式的理论基础是由 Euler 在他的《引论》(第 18 章) 中奠定的. 在那里, 他证明了怎样从一个级数得到这个级数的连分式表示以及反过来怎样做.

Euler 在连分式方面的工作, 由 Euler 和 Lagrange 在柏林科学院的一位同事 Johann Heinrich Lambert (1728～1777) 用来证明[34]: 如果 x 是有理数 (不是 0), 那末 e^x 和 $\operatorname{tg} x$ 都不能是有理数. 因此, 他不仅证明了 e^x 对正整数 x 是无理数, 而且证明了所有有理数都有着无理的自然 (底为 e) 对数. 从关于 $\operatorname{tg} x$ 的结果推出, 由于 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, 所以 $\frac{\pi}{4}$ 和 π 都不能是有理数. Lambert 实际上证明了 $\operatorname{tg} x$ 的连分式展开的收敛性.

Lagrange[35] 用连分式找到了求方程无理根的近似方法, 在同一杂志[36] 的另一篇文章中, 他用连分式的形式给出了微分方程的近似解. 在 1768 年的文章中, Lagrange 证明了 Euler 在 1744 年文章中证明的一个定理的反定理, 这个反定理说: 二次方程的实根是周期连分式.

7. 收敛与发散问题

今天, 我们知道, 十八世纪在级数方面的工作大都是形式的, 收敛与发散的问题无疑是不太认真对待的. 然而, 也不能说, 它完全被忽视了.

Newton[37]、Leibniz、Euler、甚至 Lagrange, 都把级数看作多项式的代数的推广. 他们大概没有认识到, 由于把求和推广到无

(34) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 1761, 265～322, pub.1768＝*Opera*, 2, 112～159.

(35) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23, 1767, 311～352, pub. 1769＝*Œuvres*, 2, 539～578 和 24, 1768, 111～180, pub. 1770＝*Œuvres*, 2, 581～652.

(36) 1776＝*Œuvres*, 4, 301～334.

(37) 参看第 17 章第 3 节 Newton 的引文.

穷多项，他们已经引进了新的问题．因此，他们完全不准备正视无穷级数强加给他们的问题；可是，工作中产生的明显困难使他们至少偶然地又提出这些问题．最有兴趣的问题是，如何正确地解决悖论，以及那些经常被提到而又经常被忽视的其他困难．

甚至某些十七世纪的人就已经观察到了收敛同发散的区别．1668年，Brouncker 勋爵在研究 $y=\frac{1}{x}$ 下的面积和 $\log x$ 两者之间的关系时，用与几何级数作比较的方法，证明了 $\log 2$ 和 $\log\frac{5}{4}$ 的级数的收敛性．Newton 和 James Gregory 大量应用级数的数值去计算对数表与其他函数表及积分值，他们已经知道级数的和可以是有穷，也可以是无穷．"收敛"与"发散"的名称，实际上是 James Gregory 于1668年就用过了，但他并没有发展这些概念．Newton 认识到必须考虑收敛性，但他仅仅断言幂级数至少同几何级数一样，对变量的一些小的值是收敛的．他还注明，有些级数对 x 的某些值可能是无穷，因而是无用的，例如 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 的级数在 $x=a$ 就是这样．

Leibniz 也多少意识到收敛性的重要．他在1713年10月25日给 John Bernoulli 的信中提到(现在已是一定理)：如果一个级数的项，其符号交替变化，其绝对值单调趋向于零，那末这级数收敛[38]．

Maclaurin 在他的《流数论》(1742)中，把级数用作求积分的标准方法．他说："当一个流量不能真正地用代数项表示时，则它应可表示成一个收敛级数．"他还认为，收敛级数的项必须持续下降并小于任意指定的小量．"在这时，级数开头几项就几乎等于它整个的值了．"在《流数论》中，Maclaurin 给出了(独立于 Cauchy 的发现)无穷级数收敛的积分判别法：$\sum_n\phi(n)$ 收敛，当且仅当

(38) *Math. Schriften*, 3, 922～923. Leibniz 在1714年1月10日致 John 的一封信中还给出了一个错误的证明＝*Math. Schriften*, 3, 926.

$\int_a^\infty \phi(x)$有穷，其中$\phi(x)$在$a\leqslant x\leqslant\infty$有穷并且是同号的．Maclaurin用几何形式给出了这个判别法．

关于收敛性的某些思想，Nicholas Bernoulli (1687～1759)在1712和1713年给Leibniz的信中也曾表达过．在1713年4月7日的信[39]中，Bernoulli谈到级数

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots,$$

当x是负数且数值大于1，而n是一个分母为偶数的分数时，是没有和的．这就是说，级数的(算术的)发散性并不是级数没有和的唯一原因．例如，对$x>1$，两个级数

$$(1-x)^{-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}x+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}x^2+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}x^3+\cdots$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$$

都是发散的，但第一个级数有一个可取的值，而第二个却有一个虚数值．人们不能通过对级数的检查来区别这两者，因为余项是丢掉了的．然而，Nicholas并没有给出收敛性一个清楚的概念．在1713年6月28日的答复中，Leibniz[40]对收敛级数(和我们今天的意义大致一样)用了"收缩"(advergent)这个词，并同意说，非收缩的级数可以是没有值，也可以是无穷大．

无疑，Euler看到了关于发散级数的某些困难，特别是在用它们进行计算时产生的困难，但他关于收敛与发散的概念仍然是不清楚的．他确实认识到，收敛级数的项必须变为无穷小．下面提到的一些通信将间接地告诉我们他的某些看法．

Nicholas Bernoulli (1687～1759) 在1742～1743年间，在和Euler的通信中，曾经向Euler的某些思想和工作挑战．他指出，Euler在他1734/1735年的文章(看第4节)中，用

(39) Leibniz: *Math. Schriften*, 3, 980～984.

(40) *Math. Schriften*, 3, 986.

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots = \left(1 - \frac{s^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{s^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

确实得到

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

但是没有证明 s 的基本级数的收敛性. 在 1743 年 4 月 6 日的一封信[41]中, 他说, 他不能想象, Euler 会相信一个发散级数竟能给出某些量或函数的精确值. 他指出, 余项是丢掉了的. 例如, $\frac{1}{1-x}$ 不能等于 $1+x+x^2+\cdots$, 因为余项, 也就是 $x^{\infty+1}/(1-x)$, 是丢掉了的.

在 1743 年的另一封信中, Bernoulli 说, Euler 必须区别有限多项的和与无穷多项的和. 在后一种情形下, 是没有最后项的. 因此, 人们对无穷的多项式不能应用(象 Euler 所作的)有限次多项式的根与系数的关系. 对于一个有无穷多个项的多项式, 人们不能说它的根的和.

Euler 对 Bernoulli 这些信是怎样回答的就不知道了. 在 1745 年 8 月 7 日给 Goldbach 的信[42]中, Euler 引用了 Bernoulli 的推理, 就是说, 象

$$+1-2+6-24+120-720+\cdots$$

这样的发散级数是没有和的, 但他说这些级数有一个确定的值. 他注明, 我们不应当用"和"这个名称, 因为这是指真正的加法. 他因此叙述了一个一般原理, 这个原理说明所谓一个确定的值究竟指的是什么. 他指出发散级数来自有限的代数表达式, 因此他说, 级数的值就是级数由之而来的代数表达式的值. 在1754/1755年的文章(看第 4 节)中, 他补充说: "无论如何, 一个无穷级数可作为某些有尽的表达式的展开而得到, 在数学运算中它可以用作同那些

(41) Fuss: *Correspondance*, 2, 701 ff.

(42) Fuss: *Correspondance*, 1, 324.

表达式等价的东西，甚至对那些使级数发散的变量值也是如此."在他 1755 年的《原理》中，他重述了前面的原理：

> 因此，让我们说，任何无穷级数的和是这样一个有限表达式，这级数是通过展开它而产生的．在这个意义下，无穷级数 $1-x+x^2-x^3+\cdots$ 的和将是 $1/(1+x)$，因为只要我们用数代到 x 的位置上去，这个级数就来自分式的展开．如果同意这一点，那末和这个词的新定义，当级数收敛时，同它原来所指是一致的；而就和这个词的本来意义说，发散级数没有和，因此，用这个词也不会产生什么不便．最后，借助于这个定义，我们能够保留发散级数的功用，并对所有反对意见给它们的用处作辩护[43].

毫无疑义，Euler 意在把这原理限制在幂级数的范围之内．

Euler 在 1743 年写给 Nicholas Bernoulli 的信中说，他过去对于发散级数的使用是十分怀疑的，但用他关于和的定义，却从来没有出过差错[44]．对于这一点，Bernoulli 答复说，两个不同的函数的展开可能给出同一级数，如果真是这样，和就不是唯一的了[45]．为此，Euler 在给 Goldbach 的信 (1745 年 8 月 7 日) 中写道："Bernoulli 提不出例子，我也不相信同样的级数能够来自两个完全不同的代数表达式．由此可毫无疑问地推出，任何级数，不管是收敛的还是发散的，都有一个确定的和或值."

这场争论还有一个很有意思的余波．Euler 依据的是他自己的论点，就是象

$$1-1+1-1+1-\cdots \tag{58}$$

这样的级数的和，可以取级数所由之而来的那个函数的值．因为

(43) Paragraphs 108～111.

(44) *Opera Posthuma*, 1, 536.

(45) April 6, 1743; Fuss: *Correspondance*, 2, 701 ff.

上面这个级数是从 $\frac{1}{1+x}$ 当 $x=1$ 时来的，所以有值1/2. 然而 Jean-Charles(François)Callet(1744～1799)在一篇没有发表的致 Lagrange 的便笺(Lagrange 赞成把它发表在巴黎科学院的《记要》上，但还是没有发表出来)中，在将近四十年以后指出

$$(59)\qquad \frac{1+x+\cdots+x^{m-1}}{1+x+\cdots+x^{n-1}}=\frac{1-x^m}{1-x^n}$$
$$=1-x^m+x^n-x^{n+m}+x^{2n}-\cdots.$$

对 $x=1$(且 $m<n$)，由于左边是 m/n，故右边的和也必须是 m/n，其中 m 和 n 可由我们自由选取.

Lagrange[46]考虑了 Callet 的不同意见后，认为它是不正确的. 他用 Leibniz 的可能率论证说：假定 $m=3$ 和 $n=5$，那末(59)右边的完整的级数是

$$1+0+0-x^3+0+x^5+0+0-x^8+0+x^{10}+0+\cdots.$$

现在，如果对 $x=1$，取前一项，前两项，前三项……的和，那末每五个这样的部分和就有三个等于 1，两个等于 0. 因此，最大可能的值(平均值)是 3/5；而这是级数(59)当 $m=3$ 与 $n=5$ 时的值. 顺便说明，Poisson，他没有提到 Lagrange，而把 Lagrange 的推理重做了一遍[47].

Euler 说过，在求发散级数的和时，演算必须十分小心. 他还给出了发散级数同半收敛级数的区别. 半收敛级数就是象(58)这样的级数，把它加起来，当项数愈来愈多但又没有变成无穷时，它的值是摆动的. 毫无疑问，他认识到了收敛级数和发散级数的区别. 有一次(1747)，当他用无穷级数去计算地球(作为一个扁球)对北极处一质点的吸引力时，他说，级数"激烈地"收敛.

(46) *Mém. de l'Acad. des Sci., Inst. France*, 3, 1796, 1～11. pub. 1799; 这篇文章在 *Œuvres* 中没有.

(47) *Jour. de l'Ecole Poly.*, 12, 1823, 404～509. 如果坚持用完全幂级数，那末 Lagrange 的推理更有意义些，它可以用 Frobenius 的求和定义(第 47 章第 4 节)严密化.

Lagrange 也多少意识到收敛与发散的区别. 在他早期的著作中, 对这方面的确是不清楚的. 他在一篇文章[48]中说, 一个级数将表示一个数, 如果它收敛到它的尽头, 即如果它的第 n 项趋向于 0 的话. 后来, 将近十八世纪末, 当他研究 Taylor 级数时, 他给出了我们今天所谓的 Taylor 定理[49], 这就是

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots$$

$$+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+R_n,$$

其中

$$R_n=f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

而 θ 的值在 0 与 1 之间. 这个 R_n 的表达式就是有名的余项的 Lagrange 形式. Lagrange 说, Taylor 的(无穷的)级数, 不考虑余项是一定不能用的. 然而, 他并没有研究收敛性的概念, 或者余项的值与无穷级数收敛性的关系. 他想, 我们只需考虑级数的有限多项, 使得所剩的余项很小就够了. 收敛性后来由 Cauchy 加以研究. 他强调 Taylor 定理是首要的, 并且强调这样的事实: 为了得到收敛级数, 余项必须趋向于 0.

D'Alembert 也区别过收敛与发散的级数. 在《百科全书》"级数"那一条中, 他说: "当级数愈来愈趋向某有限量, 从而级数的项(即组成级数的量)继续减小, 就称它为收敛级数, 而如果继续到无穷, 它最后就变成等于这有限量. 例如 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ 组成一个级数, 它一直趋向于 1, 而当级数继续到无穷时, 它最后变成等于 1." 在 1768 年, d'Alembert 对使用不收敛的级数表示了怀疑, 他说: "至于说到我, 我承认, 所有基于不收敛级数的推理, 在

(48) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24, 1770 = *Œuvres*, 3, 5~73, 特别是 p. 61.

(49) *Théorie des fonctions*, 2nd. ed., 1813, Chap. 6 = *Œuvres*, 9, 69~85. 微分中值定理 $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ 属于 Lagrange(1797). 后来它被用来推导 Taylor 定理, 就象在近代书中那样.

我看来，都是十分可疑的，即使它的结果能用其他方法表明是真的，也是这样."[50]鉴于 John Bernoulli 和 Euler 对级数的有效运用，象 d'Alembert 这样的怀疑，在十八世纪并没有受到注意. D'Alembert 在同一册书中给出级数 $u_1+u_2+u_3+\cdots$ 绝对收敛的一个检验法，这就是，如果对所有大于固定数 r 的 n，有 $|u_{n+1}/u_n|<\rho$，其中 ρ 和 n 无关且小于 1，则级数绝对收敛[51].

Edward Waring(1734～1798)，剑桥大学的 Lucas 数学教授，在级数方面有过先进的观点. 他讲过，级数

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

当 $n>1$ 时收敛，当 $n<1$ 时发散. 他还给出(1776)一个有名的关于级数收敛与发散的判别法，即现在认为是属于 Cauchy 的比值判别法：取级数的第 $n+1$ 项与第 n 项作比，如果当 $n\to\infty$ 时它的极限小于 1，则级数收敛；如果极限大于 1，则级数发散；当极限是 1 时得不到任何结论.

虽然 Lacroix 在他的有影响的《微积分学教程》(*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*)的 1797 年版中，关于级数说了许多荒谬的话，但在第二版中，他却小心得多了. 在谈到

$$\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\cdots$$

时，他说，我们一定要把级数说成是函数的一个发展，因为级数并不永远取它所属的函数的值[52]. 他说，级数仅仅对于 $|x|<|a|$ 才给出函数的值. 他保留了 Euler 曾经表示过的一个思想，即无穷级数还是对所有的 x 与函数连结起来的；在涉及级数的任何解析研究中，我们应正确地认为，我们是在处理函数. 因此，如果我们发现了级数的某些性质，那末我们可以相信，这些性质对函数也成

(50) *Opuscules mathématiques*, 5, 1768, 183.

(51) 171～182 页.

(52) 1810～1819, 3 vols.; Vol. 1, p. 4.

立.为了理解这个断言的正确性，只须注意到，许多级数都满足刻划函数特征的方程. 例如，对 $y=a/(a-x)$，我们有

$$a-(a-x)y=0.$$

但如果谁在这最后的方程中用级数来代替 y，他就会看到，级数也是满足这方程的. Lacroix 接下去说，人们知道，对于任何其他的例子，结果都是一样的；他还指出了大量的在今天教材中仍然保留着的例子.

平心而论，十八世纪无穷级数方面的工作中，形式的观点是占统治地位的. 总的说来，数学家甚至憎恨任何限制，例如憎恨有必要去考虑一下收敛性的问题. 他们的工作产生了很有用的结果，而他们也就满足于得到实用上的支持. 他们确已超越了他们所能给出正确理由的界限，但他们在运用发散级数时至少还是小心的. 我们将要看到，坚持只能使用收敛级数的主张，是经历大半个十九世纪才取得成功的. 但是，十八世纪的人们最后还是得到了谅解；他们预见到的关于无穷级数的两个很有生命力的思想，后来得到了承认. 第一个是发散级数可以用来给函数作数值逼近；第二个是，级数可以在解析运算中代表函数，即使这个级数是发散的也行.

参考书目

Bernoulli, James: *Ars Conjectandi*, 1713, reprinted by Culture et Civilisation, 1968.

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.

Burkhardt, H.: "Trigonometrische Reihen und Integrale bis etwa 1850," *Encyk. der math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1914~1915, 2, Part 1, pp. 825 ~1354.

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen," *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, Vol. 10, 1908, pp. 1~1804.

Burkhardt, H.: "Über den Gebrauch divergenter Reihen in der Zeit 1750~1860," *Math. Ann.*, 70, 1911, 189~206.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898,

Vol. 3, Chaps. 85, 86, 97, 109, 110.

Dehn, M., and E. D. Hellinger: "Certain Mathematical Achievements of James Gregory," *Amer. Math. Monthly*, 50, 1943, 149～163.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 10, 14, and 16 (2 parts) B. G. Teubner and Orell Füssli, 1913, 1924, 1933 and 1935.

Fuss, Paul Heinrich von: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, 2 vols., 1843, Johnson Reprint Corp., 1967.

Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-mathematik," *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 1956, 61～171; also published separately by Institut de Mathématiques, Genève, 1957.

Montucla, J. F. : *Histoire des mathématiques*, A. Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 206～243.

Reiff, R. A.: *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Lauppsche Buchhandlung, 1889; Martin Sändig (reprint), 1969.

Schneider, Ivo: "Der Mathematiker Abraham de Moivre (1667～1754)," *Archive for History of Exact Sciences*, 5, 1968, 177～317.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, pp. 85～90, 95～98.

Struik, D. J. : *A Source Book in Mathematics*, 1200～1800, Harvard University Press, 1969, pp. 111～115, 316～324, 328～333, 338～341, 369～374.

Turnbull, H. W. : *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, Royal Society of Edinburgh, 1939.

Turnbull, H. W.: *The Correspondence of Issac Newton*, Cambridge University Press, 1959, Vol. 1.

21

十八世纪的常微分方程

一个不亲自检查桥梁每一部分的坚固性就不过桥的旅行者，是不可能走远的；甚至在数学中，有些事情亦须冒险。

Horace Lamb

1. 主　题

数学家谋求用微积分解决愈来愈多的物理问题，他们很快发现不得不对付一类新的问题．他们做的比他们有意识去探求的还多．比较简单的问题引导到可以用初等函数计算的积分，而某些比较困难的问题则引出不能如此表达的积分，如椭圆积分就是实例（第19章第4节）．这两类问题都属于微积分范围．然而，解决更为复杂的问题，就需要专门的技术；这样，微分方程这门学科就应时兴起了．

有几类物理问题促进了微分方程的研究，其中一类就是现在通常称为弹性理论这一领域中的问题．一个物体如果在外力作用下产生变形，而当外力移去时就恢复原状，我们就说它是弹性的．最有实际意义的问题是考虑垂直梁和水平梁在外加载荷下所成的形状．中世纪宏伟教堂的建筑师们用经验处理的这些问题，到十七世纪由 Galileo, Edme Mariotte (1620?～1684), Robert Hooke (1635～1703)，和 Wren 这样一些人做了数学的探讨．梁的性态是 Galileo 在《关于两门新科学的对话》中所研究的两门科学之一．Hooke 对弹簧的研究引导他发现了定律：一个被伸长或被缩短的弹簧的恢复力，正比于它伸长或缩短的相对长度．十八世纪的人

们用更多的数学武装了头脑，他们关于弹性的工作，是从钻研这样一些问题开始的，如：一根悬挂在两固定点的非弹性柔软细绳所取的形状；一根悬挂在一固定点并使之振动的弦或链的形状；一根固定在两端的弹性振动弦所取的形状；一根两端固定的杆子在外加载荷下的形状，或在振动时的形状.

摆的问题不断激发着数学家的兴趣. 圆周摆的精确微分方程 $d^2\theta/dt^2+(g/l)\sin\theta=0$ 向研究工作挑战了，甚至用 θ 代替 $\sin\theta$ 所得到的近似方程在分析上也是未曾研究过的. 而且圆周摆的周期与运动的振幅不是严格无关的，这样就要求寻找一条曲线，使得摆锤沿这条曲线摆动的周期与振幅严格无关. Huygens 引进了摆线，在几何上解决了这个问题；但是分析的解还没有形成.

摆的问题密切联系着十八世纪的另外两项比较重要的研究：地球的形状和引力的平方反比律的验证. 因为摆的近似周期 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 依赖于重力加速度 g，所以用摆的周期可以测量地球表面不同地点的重力. 只要沿着一条经线，依次测量出相当于纬度改变一度的长度，再利用某一理论和相应的 g 值，就可确定地球的形状. 事实上，Newton 根据观察到的摆周期随地球表面不同地点的变化，推断出：地球在赤道上是鼓起的.

在 Newton 用理论推断出地球的赤道半径比极半径超过 1/230(这个值的百分之三十是大过头的)之后，欧洲的科学家们急欲加以核实. 方法之一是测量赤道附近和极点附近纬度一度所跨经线的长度. 如果地球是扁的，那末后一长度要比前一长度长一些.

Jacques Cassini (1677～1756)及其家庭中的一些成员作了这样的测量，而且在 1720 年给出了相反的结果. 他们发现两极之间的直径比赤道的直径大了 1/95. 为了澄清这个问题，法国科学院在 1730 年派遣了两个探险队，一队在数学家 Pierre L. M. de Maupertuis 的领导下去拉普兰特(Lapland)，另一队去秘鲁. Mauper-

tuis 分遣队里有一名是数学家 Alexis-Claude Clairaut. 他们的测量证实了地球在两极是扁平的; Voltaire 欢呼 Maupertuis 是"两极和 Cassini 们的压平者". 的确, Maupertuis 的值是 1/178, 比不上 Newton 的精确. 地球的形状问题仍旧是一个重大的课题, 而且在一个很长的时期内没有弄清楚, 这形状是否是一个扁的球面, 或一个扁长的球面, 或一般的椭球面, 或别的什么旋转面.

如果已经知道了地球的形状, 那末与此有关的问题, 即引力定律的验证, 就可进行了. 知道了地球的形状, 就能确定把一物体保持在旋转着的地球表面上或表面附近所需的向心力. 于是, 在知道了地球表面上的重力加速度 g 之后, 我们就可查对由向心加速度和 g 所提供的全部重力是否确实符合平方反比定律. 有些人怀疑这个定律, Clairaut 就是其中一个, 他有一个时期曾经相信引力的形式应该是 $F=A/r^2+B/r^3$. 引力定律和地球的形状, 这两个问题有着更深刻的内在联系, 这是因为如果把地球看成旋转的平衡流体, 那末平衡的条件就牵涉到流体质点之间的相互吸引力.

主导着这一世纪的物理研究领域是天文学. Newton 已经解决了所谓的二体问题, 即: 在太阳的引力作用下, 一个单一的行星的运动, 考虑时把两个物体都理想化成质点. 他也曾经提出了一些办法去研究比较重要的三体问题: 月球在太阳和地球引力作用下的性态. 然而, 这正是研究行星及其卫星在太阳引力和所有别的星体的相互吸引下的运动的开端. Newton 在《原理》中的工作, 虽然实际上构造了微分方程的解, 但是还有待于翻译成分析的形式. 而这个工作是在十八世纪逐步完成的. 那个优秀的法国数学家和物理学家 Pierre Varignon 在进行把动力学从几何学的束缚下解放出来的探索中, 顺便开始了这个工作. Newton 也确实用过分析的形式解决了某些微分方程, 例如他在 1671 年的《流数法》中(第 17 章第 3 节); 和 1676 年的《专论》(*Tractatus*)中, 都讲到微分方程 $d^ny/dx^n=f(x)$ 的解在 x 的一个 $n-1$ 次多项式的范围内是

任意的．在《原理》第三版命题34的注解中，他只讲了什么样形状的旋转曲面在流体中运动时受到的阻力最小；而在1694年给David Gregory的一封信中，他说明了，他是怎样得到他的结果的，并且在说明中用了微分方程．

在天文学的问题中，月球的运动受到最大的注意，这是由于确定船只在大海中的经度的一般方法(第16章第4节)，同十七世纪所介绍的别的方法一样，都有赖于知道月球每时每刻相对于一标准位置(它在该世纪的后期定为英国的格林威治)的方位．为了决定误差不超过一分的格林威治时间，就需要知道误差不超过角度15秒的月球的方位；甚至这样的误差也可能导致船只的定位有30公里的偏差．但是在Newton的时候，通用的月球位置表远没有达到这样的精度．对月球的运动理论产生兴趣的另一个原因是：它可以用来预报日蚀和月蚀，这反过来对整个天文学理论是一种检验．

常微分方程的主题产生于刚才谈到的一些问题．数学发展了，偏微分方程的课题也引导出常微分方程进一步的工作．现在叫做微分几何与变分法的这两个分支就是这样．在这一章内，我们将讨论那些直接引导到常微分方程(即只包含一个自变量的微商的方程)的基本的早期著作．

2．一阶常微分方程

象微积分在十七世纪后期与十八世纪前期的著作一样，常微分方程最早的著作出现在数学家们彼此的通信中(其中有许多已失传了)，或者出现在那些常常重登书信中建立的或说明的结果的刊物中．某人宣布一个结果往往引起另一个人的申辩，说他更早做了完全相同的工作．由于存在着激烈的竞争，这种申辩不一定是真实的．有些证明只有概述，而且弄不清作者掌握的详情；同样，在信上写着的一般解法也仅仅是特例的说明．由于这些理由，

我们即使不考虑整个严密性的问题，也很难指出谁是首先得到这些结果的人.

Huygens 在 1693 年的《教师学报》[1]中明确说到了微分方程，而 Leibniz 在同年的《教师学报》的另一篇文章中称微分方程为特征三角形的边的函数[2]. 我们通常首先学到的关于常微分方程的观点，即由给定的函数及其导数中消去任意常数后得到微分方程，大约直到 1740 年才出现，并且是由 Alexis Fontaine des Bertins 提出来的.

James Bernoulli 是用微积分求常微分方程问题分析解的先驱者之一. 在 1690 年 5 月[3]，他发表了他关于等时问题的解答，虽然 Leibniz 已经给出了这问题的一个分析解. 这个问题是：求一条曲线，使得一个摆沿着它作一次完全的振动，都取相等的时间，不管摆所经历的弧长的大小. 这微分方程，用 Bernoulli 的记号写出，就是

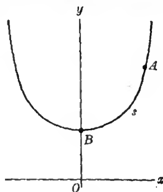


图 21.1

$$dy\sqrt{b^2y-a^3}=dx\sqrt{a^3}.$$

Bernoulli 由微分等式得出结论：两端的积分（这个词第一次被使用）必须相等，并且给出了解答

$$\frac{2b^2y-2a^3}{3b^2}\sqrt{b^2y-a^3}=x\sqrt{a^3},$$

这曲线自然是摆线.

James Bernoulli 在1690年的同一篇文章中提出了一个问题：一根柔软而不能伸长的弦自由悬挂于两固定点，求这弦所形成的曲线. Leibniz 称此曲线为悬链线. 这个问题早在十五世纪，Leonar-

(1) *Œuvres*, 10, 512～514.

(2) *Math. Schriften*, 5, 306.

(3) *Acta Erud.*, 1690, 217～219＝*Opera*, 1, 421～424.

do da Vinci 已经考虑过. Galileo 猜想这条曲线是抛物线. Huygens 证实,这是不对的,并且主要用物理的推论证明:如果弦的重量以及加在弦上的总载荷按水平方向计算是均匀的,那末曲线是抛物线. 而对于实在的悬链线,则沿曲线方向的重量是均匀的.

在1691年6月份的《学报》中, Leibniz, Huygens 和 John Bernoulli 都发表了各自的解答. Huygens 的解答是几何的,而且是不清楚的. John Bernoulli[4] 用微积分的方法给出一个解答. 在他的1691年的微积分教本中有完整的阐述,这就是现代在微积分与力学中所采用的那个讲法,它建立在微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{s}{c} \tag{1}$$

的基础上,其中 s 是由 B 到任意点 A(图21.1)之间的弧长,而 c 依赖于弦在单位长度内的重量. 从这个微分方程推导出我们现在写成 $y=c\cosh\frac{x}{c}$ 的解. Leibniz 用微积分的方法也得到这个结果.

John Bernoulli 能够解决悬链线问题,而他的哥哥 James 提出这个难题却不能解决,所以他感到莫大的骄傲. 他在1718年9月29日给 Pierre Rémond de Montmort (1678～1719) 的一封信中夸耀自己[5]:

> 我的哥哥的努力没有成功;至于我,比较幸运,因为我找到了彻底解决问题的技巧(我说这一点是毫不夸张的,为什么我要隐瞒真情呢?)并且把它转化为抛物线的求长法. 千真万确的是,我为了钻研这个问题牺牲了通宵的休息. 在那些日子里,对于我当时轻轻的年纪和业务而言,这是够呛的. 但是,第二天早晨我满怀喜悦,跑到

(4) *Acta Erud.*, 1691, 274～276=*Opera*, 1, 48～51.

(5) Johann Bernoulli, *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Birkhäuser Verlag, 1955, 97～98.

> 我哥哥那里．他深居不出，为了解开这个 Gordian 的绳结仍在苦苦地奋斗呢．象 Galileo 一样，他老是想象悬链线是一根抛物线．我对他说，停止！停止！再不要折腾你自己去证明悬链线与抛物线的等同性了，因为那是完全错误的．抛物线对悬链线的构造的确有用，但是这两种曲线是如此的不同：一个是代数的，另一个是超越的．……
> ……然而，你使我不胜惊讶，说我的哥哥曾找到了解决这个问题的方法．……我问你，难道你真的会想象，如果我的哥哥已经解决了这个疑难的问题，他对我会这样谦虚，一如他不是一个解决者，而让我与 Huygens 和 Leibniz 一道独享首创者的光荣吗？

在 1691 与 1692 年间，James 与 John 还解决了悬挂着的变密度非弹性软绳、等厚度的弹性绳、以及在每一点上的作用力都指向一固定中心的细绳所成形状的问题．John 还解决了逆问题：已知一悬挂着的非弹性细绳所成形状的曲线方程，求绳子密度相对于弧长的变化规律．在力学的教科书中，通常见到的就是 John 的解答．James 在 1691 年的《学报》中发表了一个证明：一根给定的绳子悬挂在两固定点，它能取的所有形状中，以悬链线的重心为最低．

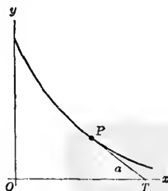


图 21.2

在 1691 年的《学报》中，James Bernoulli 推导出跟踪曲线的方程，在图 21.2 的曲线中，对于曲线上任一点 P，PT/OT 是常数．James 首先推出 $dy/ds=y/a$，这里 s 是弧长．从这个方程他推得

(2) $$\int y\,dx=\int dy\sqrt{a^2-y^2}$$

与

$$\int y^2 dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-y^2)^3}, \tag{3}$$

作为曲线的特征积分. (方程(2)可以积分成

$$x+\sqrt{a^2-y^2}=a\log[(a+\sqrt{a^2-y^2})/y].)$$

Leibniz 想到了常微分方程的变量分离法，并且于1691年函告 Huygens. 这样他就解决了形如 $ydx/dy=f(x)g(y)$ 的方程，只要把它写成 $dx/f(x)=g(y)dy/y$，就能在两边进行积分. 他并没有建立一般的方法. 他(1691年)还把一阶齐次方程 $y'=f(y/x)$ 化成积分：他令 $y=vx$，并代入方程，就使变量可以分离. 所有这些概念——变量分离与齐次方程的求解，John Bernoulli 在1694年的《教师学报》中作了更加完整的说明. 其后，Leibniz 在1694年证明如何把线性一阶常微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 化成积分. 他的方法使用了应变量的变换. 一般说来，Leibniz 只解了一阶的常微分方程.

James Bernoulli 后来在1695年的《学报》中[6]提出了求解现在叫做 Bernoulli 方程：

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n \tag{4}$$

的问题. Leibniz 在1696年证明[7]：利用变量替换 $z=y^{1-n}$，可以把方程化成线性方程 (y 和 y' 的一次方程). John Bernoulli 给出了另一种解法. James 在1696年的《学报》中本质上用变量分离法把它解出.

Leibniz 和 John Bernoulli 在1694年引进了找等交曲线或曲线族的问题，即：找一曲线或曲线族使得与一已知曲线族相交于给定的角度. John Bernoulli 称等交曲线为轨线，并且在 Huygens 的光学工作基础上指出，因为光线与光的波前是正交的，所以等交轨线的问题在求光线通过非均匀介质时的路径是重要的. 这个问

(6) Page 553.

(7) *Acta Erud.*, 1696, 145.

题一直到 1697 年都没有公开，那时 John 把它作为向 James 提出的一个挑战. James 只解决了一些特殊的实例. John 导出了一特殊曲线族的正交轨线的微分方程，并且在 1698 年[8]解出了它. 后来 Leibniz 找到一曲线族的正交轨线：考虑 $y^2=2bx$，其中 b 是曲线族参数(他引进的一个名词). 从这个方程推出 $ydy/dx=b$. Leibniz 再令 $b=-ydx/dy$，代入 $y^2=2bx$，就得到轨线的微分方程 $y^2=-2xydx/dy$，它的解为 $a^2-x^2=y^2/2$. 虽然他只解出了一些特例，但他却料想到一般的问题与解法.

正交轨线的问题一直处于沉寂状态，直到 1715 年，Leibniz 向英国数学家，主要对准 Newton，提出挑战：找出求一已知曲线族的正交轨线的一般方法. Newton 在造币厂，白天劳累之后，用睡觉前的时间解出了这个问题，他的解答发表在 1716 年的《哲学汇刊》上[9]. Newton 还指明了如何求与一已知曲线族相交成定角的曲线，或相交的角是按照给定的规律随族中曲线变化的曲线. 虽然 Newton 用了二阶常微分方程，但他的方法与现代所用方法没有太大的不同.

关于这个问题的更进一步的工作是由 Nicholas Bernoulli (1695～1726) 在 1716 年完成的. James Bernoulli 的学生 Jacob Hermann (1678～1733) 在 1717 年的《学报》中给出了一个规则：若 $F(x, y, c)=0$ 是一已知曲线族，则 $y'=-F'_x/F'_y$，其中 F'_x 与 F'_y 为 F 的偏微商，从而正交轨线的斜率[10]就是 F'_y/F'_x. 于是，Hermann 说，$F(x, y, c)=0$ 的正交轨线的常微分方程为

(5) $$F'_y dx=F'_x dy.$$

他从(5)解出 c，把它代入原来的方程 $F(x,y,c)=0$，并且解出最后得到的微分方程. 这个方法实际上是 Leibniz 的，只不过 Hermann

(8) *Opera*, 1, 266.

(9) *Phil. Trans.*, 29, 1716, 399～400.

(10) *Acta Erud.*, 1717, 349 ff. Also in John Bernoulli, *Opera*, 2, 275～279.

阐述得更为明确而已. 现在更习惯于找出 $F=0$ 所满足的真的微分方程, 这方程不含 c; 在这个方程中再用 $-1/y'$ 代替 y', 这样就得到正交轨线的微分方程.

John Bernoulli 向英国人提出了另外一些轨线的难题, 他特别讨厌的是 Newton. 由于英国人与大陆的伙伴已经不和,所以挑战是冷酷的并带有敌意.

John Bernoulli 后来解决了一个抛射体在阻力正比于速度任何次幂的介质中运动的问题, 这里的微分方程是

$$m\frac{dv}{dt}-kv^n=mg. \tag{6}$$

那时也认识了一阶恰当方程, 即方程 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 中的 $Mdx+Ndy$ 是某个函数 $z=f(x, y)$ 的恰当微分. Clairaut——他关于地球形状的著作是很有名的——已经在1739年与1740年(第19章第6节)的论文中给出方程是恰当的条件: $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$. 这个条件也由 Euler 独立地在 1734～1735 年写的一篇论文中给出[11]. 假如方程是恰当的, 那末, 如 Clairaut 和 Euler 所指出的那样, 它是可以积分的.

当一个一阶方程不是恰当时, 往往可以将方程乘上一个叫做积分因子的量, 使它化成恰当的. 虽然积分因子在一阶常微分方程的特殊问题中早已采用了, 但是领会到这个概念提供了一个方法的却是Euler(在1734/1735年的论文中); 他确立了可采用积分因子的方程类属. 他还证明: 如果知道了任何一阶常微分方程的两个积分因子, 那末令它们的比等于常数, 就是微分方程的一个积分. Clairaut 在他1739年的文章中独立地引进了积分因子的概念, 而且在1740年的论文中加上了理论. 求解一阶方程的所有初等方法到1740年都已清楚了.

---

(11) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 174～193, pub. 1740=*Opera*, (1), 22, 36～56.

3. 奇　解

奇解不能通过给积分常数以一个确定值的方法从通解得到；这就是说，它不是特解．这是 Brook Taylor 在他的«增量法»[12]中求解一阶二次方程时观察到的．Leibniz 在 1694 年已经看到：一个解族的包络也是一个解．Clairaut 和 Euler 对奇解作了更加完整的探讨．

Clairaut 在 1734 年的著作[13]中处理了现在以他的名字命名的方程

$$y=xy'+f(y'). \tag{7}$$

令 p 表示 y'，则

$$y=xp+f(p). \tag{8}$$

对 x 求微商，Clairaut 得到

$$p=p+\{x+f'(p)\}\frac{dp}{dx}.$$

从而

$$\frac{dp}{dx}=0 \quad 和 \quad x+f'(p)=0. \tag{9}$$

方程 $dp/dx=0$ 导致 $y'=c$，再由原方程我们有

$$y=cx+f(c). \tag{10}$$

这就是通解，而且它是一个直线族．第二个因子，$x+f'(p)=0$，可以与原方程一起用来消去 p；这就给出了一个新的解，它就是奇解．为了弄清它是通解的包络，我们利用(10)，并且关于 c 求微商，这样就有

$$x+f'(c)=0. \tag{11}$$

从(10)与(11)之间消去 c 得到的曲线就是包络．但是，这两个方

(12) 1715, p. 26.

(13) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1734, 196～215.

程恰好与上面给出奇解的两个方程一样. 奇解是一包络这一事实还是不甚了然的, 但是奇解不包括在通解中, Clairaut 却是清楚的.

Clairaut 与 Euler 已经给出方法, 从微分方程本身求出奇解, 即从 $f(x, y, y')=0$ 与 $\partial f/\partial y'=0$ 消去 y'. 这一点以及奇解不包括在通解中的事实, 困住了 Euler. 他在 1768 年的《原理》中[14], 给出了一个从特殊积分鉴别奇解的判别法, 此法在未知通解的情况下, 也可以应用. D'Alembert[15] 加强了这个判别法. 后来 Laplace[16] 把奇解 (他称作特殊解) 的概念推广到高阶方程和三个变量的方程.

Lagrange[17] 对奇解与通解的联系作了系统的研究. 他给出一般的方法, 用明确而漂亮的手法从通解消去常数而得到奇解, 这超过了 Laplace 的贡献. 设已知通解 $V(x, y, a)=0$, Lagrange 的方法是求出 dy/da, 并令它等于 0, 再从这个方程与 $V=0$ 消去 a. 同样的程序也适用于 $dx/da=0$. 他还扩大了 Clairaut 与 Euler 从微分方程求奇解的知识. 最后, Lagrange 给出奇解是积分曲线族的包络的几何解释. 在奇解的理论中, 有些特殊的困难他是没有认识到的. 例如, 他没有了解到: 别的奇异曲线, 但不是奇解, 也可以从 $f(x, y, y')=0$ 与 $\partial f/\partial y'=0$ 消去 y' 得到, 或者说, 一个奇解可以包括一支特解. 奇解的完整理论是在十九世纪发展起来的, 而且由 Cayley 和 Darboux 在 1872 年才把它搞成现代的形式.

4. 二阶方程与 Riccati 方程

二阶常微分方程早在 1691 年就在物理问题中出现了. James

(14) Vol. 1, pp. 393 ff.

(15) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1769, 85 ff., pub. 1772.

(16) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1772, Part 1, 344 ff., pub. 1775 = *Œuvres* 8, 325～366.

(17) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1774, pub. 1776 = *Œuvres*, 4, 5～108.

Bernoulli 研究了船帆在风力下的形状问题，即膜盖问题，而且引出一个二阶方程 $d^2x/ds^2=(dy/ds)^3$，这里 s 为弧长. John Bernoulli 在他的 1691 年的微积分教科书中处理了这个问题，并且证明：它与悬链线问题在数学上是相同的. 二阶方程后来在确定两端固定的弹性振动弦(例如,小提琴的弦)的形状问题中也出现了. Taylor在研究这个问题时是在研究一个古老的主题.由Pythagoras 的信徒开端的数学和乐声的整个主题为中世纪的人们所继承，并且传到了十七世纪. Benedetti, Beeckman, Mersenne, Descartes, Huygens 和 Galileo 在这方面都是杰出的，虽然没有什么新的数学成果值得在此一提. 一根弦可以按许多模式,即二分之一、三分之一等模式振动；一根分成 k 部分振动的弦所产生的音是第 k 谐音或第 $k-1$ 泛音 (基音为第一谐音). 这些知识大部分是通过 Joseph Sauveur (1653～1716) 的实验工作到 1700 年在英国就已熟知了.

Brook Taylor[18]导出了一根伸张的振动弦的基频. 他解出了方程 $a^2\ddot{x}=\dot{s}\dot{y}\dot{y}$, 这里 $\dot{s}=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, 而微商是对时间取的, 并且给出了 $y=A\sin(x/a)$ 作为弦在任何时刻的形状，这里 $a=l/\pi$, l 是弦的长度. Taylor 关于基频的结果(按照现代的记号)是

$$\nu=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\sigma}},$$

其中 T 为弦的张力, $\sigma=m/g$, m 是单位长度的质量, 而 g 为重力加速度.

John Bernoulli 在努力研究弦振动问题时, 在 1727 年给他的儿子 Daniel 的一封信中和一篇论文中[19], 考虑了一根无重量的弹性弦，在弦上等间隔地放置着 n 个等质量的质点. 当放置 1, 2, …, 6 个质点时，他推出了质点系的基频. (质点系还存在着别的

(18) *Phil. Trans.*, 28, 1713, 26～32, pub. 1714; also in *Phil. Trans. Abridged*, 6, 1809, 7～12, 14～17.

(19) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1728, 13～28, pub. 1732=*Opera*, 3, 198～210.

振动频率.)John 认为在每个质点上的力是它的位移的 $-K$ 倍，而且用分析方法解出了简谐运动方程 $d^2x/dt^2=-Kx$. 然后他过渡到连续弦，从而证明，在任何时刻弦的形状必定是正弦曲线(与 Taylor 一样)，他又算出了基频. 这里他解出了 $d^2y/dx^2=-ky$. John Bernoulli 和 Taylor 两人都没有研究过弹性振动体更高阶的振动模式.

在 1728 年 Euler 开始考虑二阶方程. 他对这方面的兴趣部分地是由他的力学工作引起的. 例如，他已经对摆在有阻尼介质中的运动进行研究，这就引到二阶的微分方程. 他为普鲁士国王研究了空气阻力对投射体的影响. 这里他接受并改进了英国人 Benjamin Robins 的工作，搞了一个德文的译本(1745). 这个德文本又翻译成英文与法文,并且为炮兵学所应用.

Euler 还考虑了一类二阶方程[20]，他利用变量替换把它们化到一阶方程. 例如,他考虑了方程

$$ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2y, \tag{12}$$

或它的微商形式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{p-2} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ax^m}{y^n}. \tag{13}$$

Euler 通过方程

$$y = e^v t(v), \quad x = e^{\alpha v} \tag{14}$$

引进新的变量 t 与 v，这里 α 是待定的常数. 方程(14)可以看成 x 与 y 关于 v 的参数方程,这样就可计算 dy/dx 与 d^2y/dx^2，而且代入(13)后就得到 t 作为 v 的函数的一个二阶方程. Euler 然后固定 α，从而消去指数因子,这样 v 就不再明显地出现了. 再作变换 $z=dv/dt$，就把二阶方程化到一阶的了.

因为这个方法只适用于一类二阶方程，所以其细节就不值得

(20) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1727, 124~137, pub. 1732=*Opera*, (1), 22, 1~14.

再去深究. 但是这部分工作是有历史意义的, 因为它开始了二阶方程的系统研究, 而且因为 Euler 在这里引进了指数函数, 我们将看到, 它在求解二阶与高阶方程时将起特别重要的作用.

Daniel Bernoulli, 在 1733 年离开圣·彼得堡之前, 完成了一篇论文,《关于用柔软细绳联结起来的一些物体以及垂直悬挂的链线的振动定理》[21]. 他开始研究的是上端固定的悬链线, 没有重量, 但带着等间隔的重荷. 当链线振动时, 他发现: 质点系相对于通过悬挂点的垂线作不同模式的(小)振动. 这些模式中的每一个都有各自的特征频率[22]. 对于长度为 l 的均匀的振动悬链线, 他给出了: 从最低点算起相距 x 处的位移 y (图 21.3) 满足方程



图 21.3

(15) $$\alpha \frac{d}{dx}\left(x \frac{dy}{dx}\right)+y=0,$$

它的解是一个无穷级数, 用现代的记号可表成

(16) $$y=AJ_0\left(2\sqrt{\frac{x}{\alpha}}\right),$$

其中 J_0 是零阶 Bessel 函数(第一类)[23]. 而且, α 满足

(17) $$J_0\left(2\sqrt{\frac{l}{\alpha}}\right)=0,$$

这里 l 是悬链的长度. 他断定(17)有无穷多个根, 而且这些根变得愈来愈小, 最后趋向于 0. 他得到了这种 α 的最大值. 对应于每一个 α, 就有一个振动的模式和一个特征频率.

他当时说, "从这个理论推导出符合于 Taylor 和我父亲建立的音乐弦理论将是不困难的. ……实验表明: 在音乐弦中存在着

(21) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 108~122, pub. 1738.

(22) 在 n 个质点的情形, 每个质点都有它自己的运动, 这些运动由 n 个正弦项组成, 每个正弦项有一个特征频率. 整个系统有 n 个不同的带一个特征频率的主要模式. 到底出现哪一些主要模式, 要视初始条件而定.

(23) $J_n(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k}}{k!(k+n)!}$ (n 是正整数或 0).

类似于振动链的交点(节点)."确实,这里 Bernoulli 在认识弦振动的谐音或高阶模式方面超过了 Taylor 和他的父亲.

他的关于悬链线的论文还讨论了非均匀厚度的振动链，那里他引进了微分方程

$$\alpha \frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}\right)+y\frac{dg(x)}{dx}=0, \tag{18}$$

其中 $g(x)$是链线的重量分布. 对于 $g(x)=(x/l)^2$，他给出了一个级数解,用现代的记号可以把它写成

$$y=2A\left(\frac{2x}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}J_1\left(2\sqrt{\frac{2x}{\alpha}}\right), \tag{19}$$

其中

$$J_1\left(2\sqrt{\frac{2l}{\alpha}}\right)=0,$$

J_1是第一类的一阶 Bessel 函数.

在 Daniel Bernoulli 的解答中有两点失误:第一，不提位移是时间的函数,这样一来,他的工作在数学上就停留在常微分方程的范围;第二,不提他认识到的那些实在的简单运动模式(泛音)可以迭加成更复杂的运动.

在完成了一本以乐声为主题的著作«建立在确切的谐振原理基础上的音乐理论的新颖研究»(*Tentamen Novae Theoriae Musicae ex Certissimis Harmoniae Principiis Dilucide Expositae*, 写于 1731 年,出版于 1739 年[(24)])之后, Euler 在一篇论文"关于带有任意多个重量的柔软细绳的振动"中紧跟 Daniel Bernoulli 的工作[(25)], Euler 的结果与 Bernoulli 的结果是极为相似的，只不过 Euler 的数学更为清楚. 对于连续链的一种形式，即重力正比于 x^n 的特殊情形, Euler 求解方程

(24) *Opera*, (3), 1, 197~427.

(25) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 30~47, pub. 1741=*Opera*, (2), 10, 35~49.

$$\frac{x}{n+1}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\alpha}=0.$$

他推得级数解，用现代的记号就是[26]

$$y=Aq^{-\frac{n}{2}}I_n(2\sqrt{q}),\quad q=-\frac{(n+1)x}{\alpha},$$

这里 n 是一般的. 这样 Euler 就引进了任意实指标的 Bessel 函数. 他还求出了用积分表示的解

$$y=A\frac{\int_0^1(1-t^2)^{(2n-1)/2}\cosh\left(2t\sqrt{\frac{(n+1)x}{\alpha}}\right)dt}{\int_0^1(1-\tau^2)^{(2n-1)/2}d\tau}.$$

这恐怕是二阶微分方程的解用积分来表示的最早情形.

Euler 在 1739 年的一篇论文[27]中研究了谐振子的微分方程 $\ddot{x}+kx=0$ 以及谐振子的强迫振动方程

$$M\ddot{x}+Kx=F\sin\omega_a t. \tag{20}$$

他用积分法得到了解，而且发现(实际上是重新发现，因为别人早已发现过了)共振现象；就是说，如果 ω 是振子的自然频率 $\sqrt{K/M}$ (它在 $F=0$ 时得出)，则当 ω_a/ω 趋于 1 时，强迫振动的振幅无限变大.

在试图建立声在空气中传播的模型时，Euler 在他的论文《关于脉动波通过弹性介质的传播》[28]中考虑了 n 个质量为 M 的质点系，设它们放置在一水平线 PQ 上，并且用相同的弹簧(无重量)联结起来. 设讨论的运动是纵向的，即运动沿着 PQ 进行. 对于第 k 个质点，他得到

(26) 对于一般的 ν (包括复数)，

$$I_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}.$$

函数 $I_\nu(z)$ 叫作修改了的 Bessel 函数.

(27) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1739, 128~149, pub. 1750=*Opera*, (2), 10, 78~97.

(28) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1747/1748, 67~105, pub. 1750=*Opera*, (2), 10, 98~131.

$$M\ddot{x}_k = K(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

这里 K 是弹簧常数，而 x_k 是第 k 个质点的位移．对每个质点，他求出精确的特征频率以及一般解

$$x_k = \sum_{r=1}^{n} A_r \sin\frac{rk\pi}{n+1}\cos\left(2\sqrt{\frac{K}{M}}\,t\,\frac{\sin r\cdot\pi/2}{n+1}\right), \tag{21}$$

这里 $k=1, 2, \cdots, n$．从而，他不仅求得了每个质点个别的模式，而且还求出了作为简谐振动模式迭加而成的质量的一般运动．可能出现的特定模式依赖于初始条件，就是说，依赖于各质点如何进入运动．所有这些结果也可用受荷弦的横向运动（垂直于 PQ）来解释．

某些已经研究过的方程，例如 Bernoulli 方程，是非线性的；即方程中出现变量 y, y' 和 y''（如果它出现的话）的二次或更高次的项．在这种一阶方程中，有几个具有特殊的重要性，因为它们与线性二阶方程密切相关．在常微分方程的早期历史中，非线性的 Riccati 方程

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 \tag{22}$$

博得了极大的注意．

Riccati 方程是由研究声学的威尼斯的 Jacopo Francesco Riccati 伯爵（1676～1754）引进的，它受到重视是因为可用来帮助求解二阶常微分方程．他考虑了曲率半径只依赖于纵坐标的曲线而得到[29]

$$x^m\frac{d^2x}{dp^2} = \frac{d^2y}{dp^2} + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2$$

（Riccati 写成 $x^m d^2x = d^2y + (dy)^2$），这里必须理解，x 与 y 是依赖于 p 的．作变量替换后，Riccati 得到一阶方程

$$x^m\frac{dq}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{u^2}{q},$$

(29) *Acta Erud.*, 1724, 66～73.

然后他假定 q 是 x 的幂函数, 例如 x^n, 从而化成形式

$$\frac{du}{dx}+\frac{u^2}{x^n}=nx^{m+n-1}. \tag{23}$$

于是他说明, 对于特殊的 n, 如何用常微分方程的分离变量法求解 (23). 后来, Bernoulli 们确定了 n 的另外一些值, 使得相应的 (23) 可用分离变量法求解.

Riccati 工作之所以值得重视, 不仅由于他处理了二阶微分方程, 而且由于他有了把二阶方程化到一阶方程的想法. 用这种或那种手段降低常微分方程的阶, 这种想法将是处理高阶常微分方程的主要方法.

Euler 在 1760 年[30]考虑了 Riccati 方程

$$\frac{dz}{dx}+z^2=ax^n, \tag{24}$$

而且证明: 若已知一特殊积分 v, 则变换

$$z=v+u^{-1}$$

把方程化成线性的. 而且, 若已知两个特殊积分, 则求解原方程的问题就可化为求积分的问题.

D'Alembert[31] 最先考虑 Riccati 方程的一般形式 (22), 而且对这种形式采用了 "Riccati 方程" 这一名称. 他由

$$\frac{d^2S}{dx^2}=\frac{-\lambda^2 x\pi^2 S}{2aLe}. \tag{25}$$

开始, 令

$$S=\exp\left[\int p\,dx\right], \quad p=f(x), \tag{26}$$

由此他得到形如 (22) 的 p (作为 x 的函数) 的方程.

5. 高阶方程

1734 年 12 月, Daniel Bernoulli 给当时在圣彼得堡的 Euler

(30) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1760/1761, 3~63, pub. 1763 = *Opera*, (1), 22, 334~394, and 9, 1762/1763, 154~169, pub. 1764 = *Opera*, (1), 22, 403~420.

(31) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 19, 1763, 242 ff., pub. 1770.

写信说，他已经解决了一端固定在墙上而另一端自由的弹性横梁(钢的或木的一维物体)的横向位移问题. Bernoulli 得到微分方程

$$K^4\frac{d^4y}{dx^4}=y, \tag{27}$$

其中 K 是常数，x 是横梁上距自由端的距离，y 是在 x 点的相对于横梁未弯曲位置的垂直位移. Euler 在 1735 年 6 月前的一封回信中说道，他也已发现了这个方程，而对这个方程，除了用级数外无法积分. 他确实得到了四个独立的级数解. 这些级数代表圆函数和指数函数，但是 Euler 在当时没有了解到这一点.

四年以后，Euler 在给 John Bernoulli 的信 (1739 年 9 月 15 日)中指出，他的解可以表示成

$$y=A\left[\left(\cos\frac{x}{K}+\cosh\frac{x}{K}\right)-\frac{1}{b}\left(\sin\frac{x}{K}+\sinh\frac{x}{K}\right)\right], \tag{28}$$

其中 b 由条件"当 $x=l$ 时，$y=0$"来确定，从而

$$b=\left(\sin\frac{l}{K}+\sinh\frac{l}{K}\right)\Big/\left(\cos\frac{l}{K}+\cosh\frac{l}{K}\right).$$

弹性问题促使 Euler 考虑求解常系数一般线性方程的数学问题；他在 1739 年 9 月 15 日给 John Bernoulli 的信中说，他已经取得成功. Bernoulli 回信说，他在 1700 年就已考虑了这样的方程，甚至是变系数的方程. 实际上他只考虑过一个特殊的三阶方程，并且证明如何把它化为一个二阶方程.

Euler 在他出版的著作中考虑了方程[32]

$$0=Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}+D\frac{d^3y}{dx^3}+\cdots+L\frac{d^ny}{dx^n}, \tag{29}$$

其中系数是常数. 这方程由于与 y 及其微商无关的项等于 0，所以叫作齐次的. 他指出，通解必定包含 n 个任意常数，而且是由 n

(32) *Misc. Berolin.*, 7, 1743, 193～242=*Opera*, (1), 22, 108～149.

个特解分别乘以任意常数后相加而成的. 然后他作替换

$$y=\exp\left[\int r dx\right],$$

r 是常数, 从而得到 r 的方程

$$A+Br+Cr^2+\cdots+Lr^n=0,$$

它叫作特征方程或指标方程或辅助方程. 当 q 是这个方程的一个实的单根时, 则

$$a\cdot\exp\left[\int q dx\right]$$

是原微分方程的一个解. 在特征方程有重根 q 时, Euler 令 $y=e^{qx}u(x)$, 代入微分方程, 他求得

$$y=e^{qx}(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots+\varkappa x^{k-1}) \tag{30}$$

是包含 k 个任意常数的解, 这里 k 是特征方程的根 q 的重数. 他还讨论了共轭复根和复重根的情形. 这样, Euler 完整地解决了常系数线性齐次方程.

稍后他讨论了非齐次的 n 阶线性常微分方程[33]. 他的方法是对方程乘以 $e^{\alpha x}dx$, 在两边积分, 再去确定 α, 从而把方程的阶降低. 例如, 考虑

$$C\frac{d^2y}{dx^2}+B\frac{dy}{dx}+Ay=X(x), \tag{31}$$

他乘以 $e^{\alpha x}dx$, 得到

$$\int\left[e^{\alpha x}C\frac{d^2y}{dx^2}+e^{\alpha x}B\frac{dy}{dx}+e^{\alpha x}Ay\right]dx=\int e^{\alpha x}X(x)dx.$$

但是左端必定是

$$e^{\alpha x}\left(A'y+B'\frac{dy}{dx}\right)$$

的形式, 其中 A' 与 B' 是适当的常数. 对它进行微分, 并与原方程进行比较, 他得到

(33) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1750/1751, 3～35, pub. 1753 = *Opera*, (1), 22, 181～213.

$$(32)\qquad B'=C,\quad A'=B-\alpha C,\quad A'=\frac{A}{\alpha},$$

因此，由后两个方程得

$$(33)\qquad A-B\alpha+C\alpha^2=0.$$

于是可求出 α, A', B', 而原方程化为

$$(34)\qquad A'y+B'\frac{dy}{dx}=e^{-\alpha x}\int e^{\alpha x}X(x)dx.$$

这个方程的一个积分因子是 $e^{\beta x}dx$, 这里 $\beta=A'/B'$, 因此由(32)他得到 $\alpha\beta=A/C$ 与 $\alpha+\beta=B/C$, 再由(33)推出，α 与 β 是方程(33)的两个根.

这个方法应用于 n 阶常系数的常微分方程，象上述例子一样，可以逐步把方程的阶降低. Euler 还仔细讨论了 α 满足的方程有重根和复根的情形.

Lagrange 在研究了常系数常微分方程之后，对变系数的方程也迈出了一步[34]. 这就引出了，如我们将看到的，伴随方程的概念. Lagrange 从下列方程出发:

$$(35)\qquad Ly+M\frac{dy}{dt}+N\frac{d^2y}{dt^2}+\cdots=T,$$

这里 L, M, N, …和 T 都是 t 的函数. 为了简单起见，我们将限于二阶方程. Lagrange 用 $z\,dt$ 乘其两端，其中 $z(t)$ 尚未确定，再分部积分，从而:

$$\int Mzy'dt=Mzy-\int(Mz)'y\,dt,$$

$$\int Nzy''dt=Nzy'-(Nz)'y+\int(Nz)''y\,dt.$$

于是原方程变成

$$y[Mz-(Nz)']+y'(Nz)+\int[Lz-(Mz)'+(Nz)'']y\,dt$$
$$=\int Tz\,dt.$$

(34) *Misc. Taur.*, 3, 1762/1765, 179～186=*Œuvres*, 1, 471～478.

积分号下的方括号，令其等于0，可以看成 z 的一个常微分方程．如果由它可以求出 $z(t)$，那末留下的方程是一个比原方程低一阶的 y 的常微分方程．这个关于 z 的新方程，叫作原方程的伴随方程，这个名字是由 Lazarus Fuchs 在1873年取的，Lagrange 并未给它取名．

为了处理 z 的方程（伴随方程），Lagrange 用同样的方法去降阶．他用 $w(t)dt$ 乘两端，重复上述步骤，得到 w 的一个方程，降低了 z 的方程的阶．w 的方程除了右端等于0外又回到了原来的方程(35)．因此 Lagrange 发现了一个定理：原来非齐次常微分方程的伴随方程的伴随方程，就是原来方程对应的齐次方程．Euler 在1778年本质上做了相同的事．他曾经看到过 Lagrange 的工作，但显然是忘记了．

在对变系数齐次线性常微分方程的进一步的工作中，Lagrange[35]把 Euler 对常系数线性微分方程得到的某些结果推广到这些方程．Lagrange 发现，齐次方程的通解是由一些独立的特解分别乘以任意常数后相加而成的，而且在知道了 n 阶齐次方程的 m 个特解后，可以把方程降低 m 阶．

6. 级 数 法

我们曾经顺便提到，某些微分方程是用无穷级数去解的．这个方法的重要性甚至到现在还值得对这一课题作一些特别的评注．自从1700年以来，级数解用得如此广泛，以致现在我们不得不限于少量的例子．

我们知道，Newton 利用了级数去积分稍为复杂一点的函数，其中甚至只牵涉到求曲线下的面积问题．他也用级数去求解一阶方程．例如，求解

(35) *Misc. Taur.*, 3, 1762/1765, 190～199＝*Œuvres*, 1, 481～490.

(36)
$$\dot{y}=2+3x-2y+x^2+x^2y,$$
Newton 假定

(37)
$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots,$$
于是

(38)
$$\dot{y}=A_1+2A_2x+3A_3x^2+\cdots.$$
把(37)与(38)代入(36),并使 x 的同次幂的系数相等,就得到
$$A_1=2-2A_0,\quad 2A_2=3-2A_1,\quad 3A_3=1+A_0-2A_2,\quad \cdots.$$
于是,除了 A_0 以外,我们确定了所有的 A_i. 那时已经注意到,A_0 是不定的,因而有无穷多个解. 但是,直到1750年左右,对任意常数的意义还不是完全了解的. Leibniz 用无穷级数解某些初等的微分方程[36],也用了上述的未定系数法.

大约在1750年以后,Euler 把级数方法提到了重要的位置,用来求解那些不能以紧凑形式积分的微分方程. 虽然他求解的是特殊的微分方程,而且其细节往往是复杂的,但是他的方法就是我们现在采用的方法. 他假定解的形式为
$$y=x^\lambda(A+Bx+Cx^2+\cdots),$$
把 y 与它的微商代入微分方程, 利用所得级数中 x 的各次幂的系数必须等于0这个条件, 就确定出 λ 与系数 A, B, C, $\cdots$. 这样, 对他在振动薄膜的著作中出现的常微方程[37](见第22章第3节),即
$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\left(\alpha^2-\frac{\beta^2}{r^2}\right)u=0,$$
现在叫作 Bessel 方程, Euler 是用一个无穷级数求解的. 他给出的解
$$u(r)=r^\beta\left\{1-\frac{1}{1\cdot(\beta+1)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^2+\frac{1}{1\cdot2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^4\right.$$

---

(36) *Acta Erud.*, 1693=*Math. Schriften*, 5, 285~288.

(37) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 243~260, pub. 1766=*Opera*, (2), 10, 344~359.

$$-\frac{1}{1\cdot2\cdot3(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)^6+\cdots\Big\},$$

除了一个只依赖于β的因子外，就是我们现在所写的$J_\beta(r)$. 在有关这些函数的进一步的著作中，他证明，对于半奇整数的β，相应的级数化成初等函数. 他而且注意到，对于实的β，$u(r)$有无穷多个零点，他还给出了$u(r)$的积分表示. 最后，对于$\beta=0$与$\beta=1$，他给出了微分方程第二个线性独立的级数解.

Euler 在《积分学原理》[38]中研究了超几何方程

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy}{dx}-aby=0, \tag{39}$$

并且给出了级数解

$$y=1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\cdot2\cdot c(c+1)}x^2+\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot c(c+1)(c+2)}x^3+\cdots. \tag{40}$$

在1778年写的关于这个题目的重要论文[39]中，他再一次给出了上述形式的方程(39)和级数解(40). 他曾经写了另外几篇论文，讨论了他称之为超几何级数的级数，但这名字原先是由 Wallis 用来称呼别的级数的. “超几何”一词是 Gauss 的朋友和老师 Johann Friedrich Pfaff (1765～1825) 提出的，用来形容微分方程(39)和级数(40). 级数(40)中的y现在用记号$F(a, b, c; z)$来表示. 我们用它表示 Euler 得到的有名的关系式

$$\begin{aligned}&F(-n, b, c; z)=(1-z)^{c+n-b}F(c+n, c-b, c; z),\\ &F(-n, b, c; z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^n dt\\ &\qquad(\mathrm{Re}(c)>\mathrm{Re}(b)>0).\end{aligned} \tag{41}$$

(38) Vol. 2, 1769, Chaps. 8～11.

(39) *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 12, 1794, 58～70, pub. 1801=*Opera*, (1), 16_2, 41～55.

7. 微分方程组

在弹性理论的研究中，直到现在涉及到的一些微分方程是颇为简单的，因为数学家使用了相当粗略的物理原理，而且仍在为掌握更好的原理而奋斗着．然而，在天文学领域中，物理原理，主要是 Newton 的运动定律和引力定律，是很清楚的；其数学问题也深刻得多．在研究两个或多个物体在相互吸引作用下的运动时，基本的数学问题是求解常微分方程组，虽然这个问题往往化成求解单独一个方程的问题．

除了个别情况外，有关方程组方面的著作主要是讨论天文学的问题．列出微分方程的基础是牛顿的第二运动定律，$f=ma$，这里 f 是吸引力．这是一个向量形式的定律，它表示：f 的每个分量在该分量的方向上产生一个加速度．Euler 在 1750 年的一篇论文[40]中给出 Newton 第二定律的分析形式

$$f_x=m\frac{d^2x}{dt^2},\quad f_y=m\frac{d^2y}{dt^2},\quad f_z=m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{42}$$

这里他用了固定的直角坐标系．他还指出，对于点状的物体，即质量可以看成集中于一点的物体，m 是总质量；而对于分布质量的物体，m 是 dM．

我们将简略地考虑一下微分方程的建立．假定一个质量为 M 的物体固定于原点，另一个质量为 m 的运动体位于 (x, y, z)．于是，沿坐标轴方向的引力分量（图 21.4）为

$$f_x=-\frac{GMmx}{r^3},\quad f_y=-\frac{GMmy}{r^3},\quad f_z=-\frac{GMmz}{r^3},$$

其中 G 是引力常数，而 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$．

容易证明，运动物体保持在一个平面内，这样方程组(42)化为

(40) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 6, 1750, 185～217, pub. 1752＝*Opera*. (2), 5, 81～108.

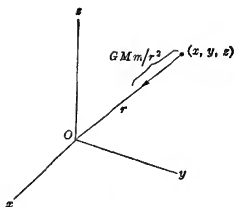


图 21.4

(43)
$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kx}{r^3},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{ky}{r^3},$$

而 $k=GM$. 在极坐标中，这些方程变成

(44)
$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{k}{r^2},$$
$$r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=0.$$

一个物体在另一个固定物体的引力下运动的情况，两个微分方程可以合成一个只含 x 和 y 或 r 和 θ 的微分方程，这是由于，例如第二个极坐标方程可以积分成 $r^2\frac{d\theta}{dt}=C$，再把 $\frac{d\theta}{dt}$ 的值代入第一个方程. 由此可以弄清楚，运动物体的轨迹是一条以第一个固定物体为焦点的圆锥曲线.

如果两个物体在互相吸引下一起运动，那末微分方程就稍有不同了. 令 m_1 与 m_2 是两个具有球对称质量的球形物体的质量，而且 $m_1+m_2=M$. 选取一个固定坐标系(取两物体的质量中心为原点)，并且令 (x_1, y_1, z_1) 是一个物体的坐标，而 (x_2, y_2, z_2) 是另一个物体的坐标; 设 r 是距离

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

于是描述它们运动的方程组就是

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(x_1-x_2)}{r^3},$$

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(y_1-y_2)}{r^3},$$

$$m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(z_1-z_2)}{r^3},$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(x_2-x_1)}{r^3},$$

$$m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(y_2-y_1)}{r^3},$$

$$m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}=-km_1m_2\frac{(z_2-z_1)}{r^3}.$$

这是六个二阶方程的方程组，它的解要求有十二个积分，而每个积分都有一个任意常数。这些常数是由每个物体的初始位置的三个坐标和初始速度的三个分量来确定的. 方程可以解出，而且它的解表明：每个物体都是按(以两个物体的质量中心为焦点的)圆锥曲线运动的.

实际上，这个在引力相互吸引下两个球体的运动问题，是由 Newton 在«原理»(卷 I 第 11 节)中用几何方法解决的. 然而，分析方面的工作暂时还没有动手进行. 在力学方面，法国人追随了 Descartes 的系统，一直到 Voltaire，在 1727 年访问伦敦之后，才宣扬 Newton 的体系. 甚至在剑桥 (Newton 的母校) 还继续用 Descartes的信徒 Jacques Rohault(1620～1675)的教科书教授自然哲学. 另外，十七世纪后半期最著名的数学家——Huygens、Leibniz 和 John Bernoulli——是反对引力的观念及其应用的. 用分析方法研究行星运动是由 Daniel Bernoulli 着手进行的，他由于 1734 年关于二体问题的一篇论文而得到了法国科学院的奖金. Euler 在他的书«行星和彗星的运动理论» (*Theoria Motuum Planetarum et Cometarum*)[41]中就完全用分析方法了.

设有 n 个物体，每个都是球形的，而且质量分布是球对称的(密度为半径的函数)，那末它们之间的吸引一如它们的质量集中

(41) 1744=*Opera*, (2), 28, 105～251.

在各自的质量中心一样. 令 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 表示质量, (x_i, y_i, z_i) 表示第 i 个质量相对于固定坐标系的可变坐标; 令 r_{ij} 为从 m_i 到 m_j 的距离. 于是作用在 m_1 上的力沿 x 方向的分量为

$$-\frac{k}{r_{12}^3} m_1 m_2 (x_1 - x_2), \quad -\frac{k}{r_{13}^3} m_1 m_3 (x_1 - x_3), \quad \cdots,$$

$$-\frac{k}{r_{1n}^3} m_1 m_n (x_1 - x_n),$$

对于沿 y 方向与 z 方向的分量, 有类似的表达式. 每个物体上都有这种力的分量作用着.

于是, 第 i 个物体的运动方程是

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= -k m_i \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{(x_i - x_j)}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= -k m_i \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{(y_i - y_j)}{r_{ij}^3}, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= -k m_i \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{(z_i - z_j)}{r_{ij}^3}, \end{aligned} \tag{45}$$

$j \neq i$; $i = 1, 2, \cdots, n$. 共有 $3n$ 个二阶方程. 原点可以取在 n 个物体的质量中心或其中的一个物体上, 例如在太阳上. 共有 $6n$ 个积分; 其中 10 个可以相当容易地找到; 这 10 个积分就是我们在一般问题中所知道的仅有的积分.

n 体问题, 实际上甚至三体问题, 是不能精确解出的. 因此对这个问题的研究已经选择了两个一般的方向. 第一个方向是探索人们可以导出什么样的、至少可以阐明运动的定理. 第二个方向是找近似解, 在某个可以利用初始资料的时刻以后的一个时期内, 这种近似解可能是有用的; 这就是大家知道的摄动法.

第一种类型的研究, 对 n 体质量中心的运动, 产生了几个定理, 由 Newton 在他的《原理》中给出. 例如, n 体质量中心在一直线上作匀速运动. 上面提到的十个积分, 它们是所谓运动守恒律的推论, 也算是第一种类型的定理. 这些积分, Euler 是知道的.

对于三体问题的一些特殊情形，还有某些精确的结果，这些结果应归功于天体力学大师之一，Joseph-Louis Lagrange.

Lagrange (1736～1813) 是法国和意大利血统的人. 在少年时，他对数学没有好印象，但是还在学校的时候，他读了 Halley 写的关于 Newton 微积分的功劳的一篇短文，而变得热爱这门学科了. 在十九岁的时候，他就成为他的故乡都灵的皇家炮兵学校的数学教授. 他很快对数学做出大量的贡献，甚至在早年时，他已被公认为那个时代的最大数学家之一. 虽然 Lagrange 的工作涉及许多数学分支——数论，代数方程论，微积分，微分方程和变分法——与许多物理分支，但是他的主要兴趣是把引力定律应用于行星运动. 他在 1775 年说过，"算术研究是最叫我伤脑筋的，而且恐怕是最少价值的." Archimedes 是 Lagrange 崇拜的偶像.

Lagrange 最有名的著作，他的«分析力学»(*Mécanique analytique*, 1788; 第二版, 1811～1815; 他死后又出一版, 1853)扩大并完善了 Newton 关于力学的工作. Lagrange 有一次曾经发牢骚说，Newton 是一个最侥幸的人，因为只有一个宇宙而 Newton 已经发现了它的数学规律. 然而，Lagrange 在使世界了解 Newton 理论的完美性方面也有功绩. 虽然他的«分析力学»是一本科学经典，并且对常微分方程的理论与应用也很重要，但是 Lagrange 却难于找到一个出版者.

在三体问题中得到的一些特殊精确解，是 Lagrange 在 1772 年一篇得奖论文«论三体问题» (*Essai sur le problème des trois corps*)[42]中给出的. 这些解中，有一个是说，这些物体能够作这样的运动，使得它们的轨道是同时描出的三个相似椭圆，而且以三物体的质量中心为共同的焦点. 另一个是，假定三个物体从一个等边三角形的三个顶点开始运动，那末它们就好象粘住在这个三角形上运动着，而这个三角形本身围绕着三物体的质量中心转动.

(42) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 9, 1772=*Œuvres*, 6, 229～331.

第三个是，假定三物体是从一直线上的初始位置投入运动的，那末在适当的初始条件下，它们将继续固定在这一直线上，而这条直线在一平面上围绕物体的质量中心转动．对于 Lagrange 来说，这三种情况是没有物理实在性的，然而那个等边三角形的情况在1906年被发现适用于太阳、木星和一个名叫 Achilles 的小游星．

关于 n 体问题的第二类问题，如已经指出的，是从事于近似解或摄动理论的研究．两个球形的物体，在它们的引力相互作用下，是沿圆锥曲线运动的，称这种运动为非摄动的．对这种运动的任何偏离，不管是位置的还是速度的，都称为被摄动的运动．如果两个球体所处的介质对运动具有阻力，或者如果两个物体不再是球形的，比如说是扁球形的，或者如果除这两个物体外还牵涉到更多的物体，那末这些物体的轨道将不再是圆锥曲线了．在应用望远镜以前，摄动现象是不引人注目的．在十八世纪，计算摄动成为一大数学问题，而 Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange 以及 Laplace 都作出了贡献．在这个领域中，Laplace 的著作是最杰出的．

Pierre-Simon de Laplace (1749～1827) 出生于诺曼底 (Normandy) 的皮奥蒙 (Beaumont) 镇，他的父母家境还算不错．Laplace 在十六岁那年就进了开恩大学，学习数学，当时他很有可能成为一个牧师．他在开恩渡过了五年，那时他在开恩写了一篇关于有限差分的论文．在完成他的学业后，Laplace 带着几封介绍信到巴黎去找 d'Alembert，遭到 d'Alembert 的回绝．后来 Laplace 向 d'Alembert 写了一封信，阐述了力学的一般原理；这回，引起了 d'Alembert 的重视而召见他，并给他取得巴黎军事学校数学教授的职位．

Laplace 还在青年时代就发表了丰硕的成果．巴黎科学院在他 1773 年入选后不久所写的一份报告书中指出，还没有一个如此年青的人就在这样多方面和困难的主题上，提出如此多的论文．

在1783年，他接替了军事考试委员 Bezout，而且考试了 Napoleon. 在革命期间，他是度量衡委员会的委员，但是后来与 Lavoisier 还有其他人，由于不是好的共和人士而被开除了. Laplace 就隐居在巴黎附近的一个小城市梅龙，在那里他写了他有名的通俗的«宇宙系浅说»(*Exposition du système du monde*, 1796). 革命后，他是师范学院的教授，当时 Lagrange 也在那里教书. Laplace 在政府的几个委员会里工作，后来历任内政部长，议会委员，和议会大臣. Laplace 虽然由 Napoleon 封为伯爵，但是他在1814年投票反对 Napoleon，而依附了 Louis 十八. Louis 封他为法兰西的侯爵与贵族.

在参与政治活动的这些年月里，他继续从事科研工作. 在1799年与1825年期间，出版了他的«天体力学»(*Mécanique céleste*)的五卷本. 在这部著作中，Laplace 给出了太阳系力学问题的"完全的"分析解. 他尽可能少用观察资料. «天体力学»把 Newton, Clairaut, d'Alembert, Euler, Lagrange 以及 Laplace 自己的结果和发现，统一成一个整体. 这部杰作是如此的完全，以致他的最接近的后继者不能再添加什么了. 恐怕唯一的缺点是，Laplace 经常不交代他的结果的来源，给人的印象，好象都是他自己的.

1812年，他出版了他的«概率的分析理论»(*Théorie analytique des probabilités*). 第二版(1814)的序言是一篇通俗的短文，题为«关于概率的哲学浅说»(*Essai philosophique sur les probabilités*)，其中有一段著名的议论，大意是说，世界的未来是完全由它的过去决定的，而且只要掌握了这个世界在任一给定时刻的状态的数学信息，就能预报未来.

Laplace 在数学物理中有许多重要的发现，其中有一些我们将在以后几章中谈到. 事实上，凡是有助于解释世界的任何事情，他都感兴趣. 他研究过流体动力学、声波的传播和潮汐. 在化学方

而，他的关于物质液态的著作是经典的．他的关于在毛细管中使水上升的表面张力的研究，和在液体中内聚力的研究，都是重要的．Laplace 与 Lavoisier 设计了一个测量热量的冰块量热计(1784)，测定了许多物质的比热；对他们来说，热仍旧是一种特殊的物质．不过，Laplace 的大半生致力于天体力学的研究，他在 1827 年逝世．据说他的遗言是，“我们知道的，是很微小的；我们不知道的，是无限的”——可是 de Morgan 说，那遗言是“人们了解的只是幻像”．

Laplace 与 Lagrange 有经常的联系，但是他们的个性与工作，都是不相同的．Laplace 的虚荣心，使他不能充分肯定他认为是他对手的工作；事实上，他利用了 Lagrange 的许多概念而不作声明．通常在一同谈到 Lagrange 和 Laplace 时，总是要对 Laplace 的个人品德进行批评．Lagrange 是数学家，他写作时很精心，写得很清楚，很优美．Laplace 创造了许多新的数学方法，它们后来发展成为数学的分支．但是，他从来不关心数学，除非它有助于研究自然．当他在物理学的研究中碰到一个数学问题时，他解决得几乎是很随便的，并且仅仅说，“容易看出，……”，从不耐心解释他是如何得出结果的．可是，他也承认，要重新建立他自己的结果是不容易的．美国数学家与天文学家 Nathaniel Bowditch (1773～1838) 翻译了《天体力学》五卷本的四卷以及附加的说明．他说，只要一碰见“容易看出，……”这句话，我就知道总得化几个小时的苦功夫去填补这个空白．的确，Laplace 对数学是不耐烦的，而爱好应用．他对纯粹数学不感兴趣，至于他在这方面的贡献乃是他在自然哲学中的伟大著作的副产品．数学是一种手段，而不是目的，是人们为了解决科学问题而必须精通的一种工具．

在与本章主题有关的范围内，Laplace 的工作，是处理行星运动问题的近似解．用近似方法得到有用解的可能性在于下列原因．太阳系是由太阳主宰的，太阳占整个系统总质量的百分之

99.87. 这就是说，由于行星相互之间的摄动力是微小的，所以行星的轨道近乎椭圆. 然而，木星占行星总质量的百分之七十. 又地球的卫星相当接近于地球，这样它们就互相影响，因此必须考虑摄动.

三体问题，特别是太阳、地球和月球，在十八世纪研究得最多，一部分原因是由于它是二体问题之后接着要考虑的一步，另一部分原因是由于航海需要对月球运动有精确的认识. 在太阳、地球和月球的实例中，可以利用某些有利的事实，即太阳与其余两个星球离得较远，从而可以认为它对地球和月球之间的相对运动只产生微小的影响. 在太阳和两个行星的实例中，通常认为一个行星摄动了另一个行星绕太阳的运动. 如果其中一个行星是微小的，那末它对另一个行星的引力效应可以忽略，但是必须考虑大行星对小行星的引力效应. 三体问题的这些特例叫作受限制的三体问题.

三体问题的摄动理论最先应用于月球的运动；这是 Newton 在《原理》的第三卷中用几何方法作出的. Euler 与 Clairaut 试图求得一般三体问题的精确解而抱怨困难，因而只得用近似方法. 这里 Clairaut 用微分方程的级数解作出了第一个实在的进展 (1747). 然后他及时地把他的结果应用到 Halley 彗星的运动. 在 1531, 1607 和 1682 年曾经观察到这颗彗星，他预计在 1759 年彗星将出现在它绕地球的轨道的近地点上. Clairaut 计算了由木星和土星的引力所产生的摄动，并且在 1758 年 11 月 14 日在巴黎科学院宣读的一篇论文中预报，1759 年 4 月 13 日彗星将出现在近地点. 他附带说明，精确的时间不能肯定，但不出一个月的范围，这是因为木星和土星的质量还知道得不很精确，而且还有别的行星所引起的微小摄动. 在 3 月 13 日，彗星到达了它的近地点.

为了计算摄动，产生了所谓的元素变值法或参数变值法——

或积分常数变值法，这是一个最有效的方法．我们将只限于讨论它的数学原理，所以不考虑完整的物理背景．

数学上，三体问题的参数变值法可追溯到 Newton 的«原理»．在研究月球绕地球运动而得到椭圆轨道后，Newton 考虑了月球轨道的变值，算出太阳对它的影响．John Bernoulli 在 1697 年的«教师学报»[43]上用这个方法去解个别情况下的非齐次方程，而 Euler 在 1739 年用它来研究二阶方程 $y''+k^2y=X(x)$．Euler 在 1748 年的一篇论文[44]中最先用它去研究行星运动的摄动，这篇论文研究了木星和土星的相互摄动，获得了法国科学院的奖金．对这个方法，Laplace 写了许多论文[45]．这个方法是由 Lagrange 在两篇论文中[46]充分发展的．

单个常微分方程的参数变值法由 Lagrange 应用到 n 阶方程

$$Py+Qy'+Ry''+\cdots+Vy^{(n)}=X,$$

其中 $X, P, Q, R, \cdots, V$ 是 x 的函数．为了简单起见，我们将假定方程是二阶的．

在 $X=0$ 的情况，Lagrange 已知通解是

$$y=ap(x)+bq(x), \tag{46}$$

其中 a 与 b 是积分常数，而 p 与 q 是齐次方程的特殊积分．接着，Lagrange 说，让我们把 a 与 b 看作 x 的函数．因而

$$\frac{dy}{dx}=ap'+bq'+pa'+qb'. \tag{47}$$

Lagrange 令

$$pa'+qb'=0; \tag{48}$$

(43) Page 113.

(44) *Opera*, (2), 25, 45～157.

(45) See, for example, *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1772, Part 1, 651 ff., pub. 1775＝*Œuvres*, 8, 361～366, and *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1777, 373 ff., pub. 1780＝*Œuvres*, 9, 357～380.

(46) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 5, 1774, 201 ff., and 6, 1775, 190 ff.＝*Œuvres*, 4, 5～108 and 151～251.

就是说，他让 y' 中由 a 与 b 的变值而引起的那一部分等于0. 由(47)，根据(48)，有

$$\frac{d^2y}{dx^2}=ap''+bq''+a'p'+b'q'. \tag{49}$$

如果方程高于二阶，Lagrange 再令 $p'a'+q'b'=0$，并求出 d^3y/dx^3. 由于在我们这个情形，方程是二阶的，他就保留了(49)中的全部项.

他接着把(46)，(47)和(49)给出的 y, dy/dx 和 d^2y/dx^2 的表达式代入原方程. 由于(46)是齐次方程的解，而(48)扔掉了由 a 与 b 的变化而引起的那些项，所以在代入后留下

$$p'a'+q'b'=\frac{X}{R}. \tag{50}$$

这个方程与方程(48)组成了关于未知函数 a' 与 b' 的代数方程组. 从这方程组可以解出 a' 和 b'，用已知函数 p, q, p', q', X 与 R 表示. 然后可用积分求得 a 与 b，或者至少可以化成积分. 以这些 a 与 b 代入(46)，就得到原来的非齐次方程的一个解. 这个解与齐次方程的解一起组成非齐次方程的通解.

Lagrange以更一般的形式处理了参数变值法[47]，而且指出，这个方法可以应用于许多物理问题. 在1808年的一篇论文中，他把这个方法应用到由三个二阶方程组成的方程组. 技巧上自然更复杂了，但是基本思想还是把相应的齐次方程的六个积分常数看成是变化的，并确定它们，使表达式满足非齐次方程组.

Lagrange 与 Laplace，在他们正在发展参数变值法期间以及其后，写了一些解答太阳系基本问题的读物. Laplace 在他的无与伦比的著作«天体力学»中，总结了他们工作成果的概况:

> 在这本著作的第一部分，我们给出了物体平衡与运动的一般原理. 这些原理对天体运动的应用，通过几何的[分

(47) *Mém. de l'Acad. des Sci., Inst. France*, 1808, 267 ff. = *Œuvres*, 6, 713～768

> 析的]论证，不必作任何假设，就导出万有引力定律，而重力的作用与抛射物运动则是这个定律的特例．然后我们考虑了服从于这个伟大自然定律的体系，用奇妙的分析，得到了它们的运动和图形的一般表达式，以及覆盖在它们表面上的流体振动的一般表达式．从这些表达式，我们推断出所有大家知道的潮汐现象；纬度的变化与地球表面的引力；岁差；月球的引力作用；以及土星环的形状与转动．我们还指出这些环永远停留在土星赤道平面上的理由．而且从同一个引力理论，我们还推出行星运动的主要方程，特别是木星和土星的方程，木星与土星最大的均差有一个 900 年以上的周期．[48]

Laplace 总结说：大自然安排的天体布局，“永远根据同一原理，这些原理在地球上如此奇妙地适合于个体的生存和物种的永存.”

一方面求解微分方程的数学方法有了改进，一方面关于行星的新的物理事实有所发现，整个十九与二十世纪，在 Laplace 提到过的各种课题方面，特别是关于 n 体问题和太阳系的稳定性方面，人们为了求得更好的结果而作出了努力.

8. 总 结

如我们已经看到的，为了解决最初只不过涉及到一些积分的物理问题，逐渐引导到一个新的数学分支的出现，即常微分方程的建立．到十八世纪中期，微分方程的课题成为一门独立的学科，而这种方程的求解成为它本身的一个目标.

对解的理解与寻求，在本质上逐渐起了变化；最初，数学家用初等函数找解；接着他们满足于用一个没有积出的积分来表示解.

(48) Vol. 3 序言.

在用初等函数及其积分来寻找解的巨大努力失败之后，数学家就变得满足于用无穷级数求解了.

把解表成积出形式的难题没有被遗忘掉，但数学家们不是企图用这种方式去解物理问题中出现的特殊微分方程，而是去寻找那些可以用有限个初等函数表示其解的微分方程. 可以用这种方式积分的大量微分方程找到了. D'Alembert (1767) 研究过这一问题，并把椭圆积分列入了可以接受的解答中. 对这问题的一个典型研究方法是由 Euler(1769) 和其他一些人做出的，这是从解可以表成积出形式的微分方程出发，然后从这些已知方程导出其他的方程. 另外一种研究是寻找级数解可以只含有限多个项的条件.

在 Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet(1743～1794)著的«积分计算»(*Du calcul intégral*,1765)中，一个有趣而没有结果的篇章是，他企图把求解常微分方程所用的许多孤立的方法与技巧搞出一个条理. 他把这种运算列成微分、消去和替换，并想把所有的方法都化归到这些规范运算. 这个工作是失败了. 与这个计划类似的是，Euler 证明：凡是可用变量分离法的地方都可用积分因子，但是反之不然. 他还证明：对于高阶微分方程，变量分离法将是不可行的. 至于寻找替换，他发现没有一般原则[49]，而且它与直接求解微分方程的难度相同. 但是，变换可以降低微分方程的阶. Euler 用这个概念去解 n 阶非齐次线性常微分方程，甚至在齐次的情况，他想适当地选取 p，使得每个 $\exp\int p\,dx$ 给出常微分方程的一阶因子. 降阶法也是 Riccati 的方案. 还有许多其他的方法，包括 Lagrange 的未定乘子法. 最早以为 Lagrange 方法是普遍适用的，但是结果并非如此.

探索常微分方程的一般积分方法大概到 1775 年终止. 许多新的著作仍旧是研究常微分方程的，特别是那些从求解偏微分方

(49) *Institutiones Calculi Integralis*, 1, 290.

程中得出的常微分方程．但是，除了我们这里已提到过的那些方法以外，一百年上下没有发现别的重大的新方法；直到十九世纪末才引进了算子方法和 Laplace 变换．事实上，人们对于一般的求解方法的兴趣减退了，因为得到了一些适合于应用的这种或那种形式的方法．求解常微分方程的广泛的综合的原则仍付缺如．总的说来，这门学科还是各种类型的孤立技巧的汇编．

参考书目

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprinted by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprinted by Georg Olms, 1968.

Berry, Arthur: *A Short History of Astronomy*, Dover (reprint), 1961, Chaps. 9～11.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924, Vol. 3, Chaps. 100 and 118, Vol. 4, Sec. 27.

Delambre, J. B. J.: *Histoire de l'astronomie moderne*, 2 vols., 1821, Johnson Reprint Corp., 1966.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, Orell Füssli, Series 1, Vols. 22 and 23, 1936 and 1938; Series 2, Vols. 10 and 11, Part 1, 1947 and 1957.

Hofmann, J. E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimal-mathematik," *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 61～171. Published separately by Institut de Mathématiques, Geneva, 1957.

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, 1868～1873, relevant papers in Vols. 2, 3, 4, and 6.

Lagrange, Joseph-Louis: *Mécanique analytique*, 1788; 4th ed., Gauthier-Villars, 1889. The fourth edition is an unchanged reproduction of the third edition of 1853.

Lalande, J. de: *Traité d'astronomie*, 3 vols., 1792, Johnson Reprint Corp., 1964.

Laplace, Pierre-Simon: *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1891～1904, relevant papers in Vols. 8, 11 and 13.

Laplace, Pierre-Simon: *Traité de mécanique céleste*, 5 vols., 1799～1825. Also in *Œuvres complètes*, Vols. 1～5, Gauthier-Villars, 1878～1882. English trans. of Vols. 1～4 by Nathaniel Bowditch, 1829～1839, Chelsea (reprint), 1966.

Laplace, Pierre-Simon: *Exposition du système du monde*, 1st ed., 1796, 6th ed. in *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1884, Vol. 6.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, 1802, Albert Blanchard (reprint),

1960, Vol. 3, 163~200; Vol. 4, 1~125.

Todhunter, I.: *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth*, 1873, Dover (reprint), 1962.

Truesdell, Clifford E.: *Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia, Vol. X et XI Seriei Secundae*, in Euler, *Opera Omnia*, (2), 11, Part 2, Orell Füssli, 1960.

22

十八世纪的偏微分方程

数学分析与自然界本身同样的广阔。

Joseph Fourier

1. 引　言

跟常微分方程的情况一样，数学家们并不是自觉地创立偏微分方程学科的. 他们不断地探索那些引导出前一学科的同样的物理问题; 当他们更好地掌握了构成这些现象基础的物理原理时, 他们就确切阐明了现在包含在偏微分方程中的这些物理现象的数学表述. 例如, 由于曾经把振动弦的位移分别作为时间的函数以及作为从一个端点到弦上一点的距离的函数来进行研究，于是把位移作为这两个变量的函数来研究并试图了解所有可能的运动就导致了一个偏微分方程. 这一研究的自然继续, 即考察弦发出的声音在空气中的传播, 导出了又一些偏微分方程. 在研究了这种声音之后, 数学家们处理了各种形状的号角、管风琴、铃、鼓和其他乐器发出的声音.

用物理的术语来说, 空气是一种流体, 不过恰好是可压缩的. 液体实际上是不可压缩的流体. 这类流体的运动规律, 特别地, 还有能在这二者中传播的波变成了一个广阔的研究领域, 现在构成了流体动力学这门学科. 这个领域同样也提出了偏微分方程.

整个十八世纪, 数学家们继续致力于不同形状的物体, 尤其是椭球体所产生的万有引力问题的研究. 虽然基本上这是一个三重

积分的问题，但是 Laplace 以我们即将考察的一种方式把它变成了偏微分方程的问题。

2. 波动方程

虽然特殊的偏微分方程早在1734年就出现在Euler的著作[1]中，并于1743年出现在d'Alembert的《论动力学》(*Traité de dynamique*)中，但其中并无值得注意的东西．关于偏微分方程的第一次真正的成功来自对以小提琴弦为典型的弦振动问题的重新进攻．为使偏微分方程易于处理，加上了振动很小的近似．Jean Le Rond d'Alembert(1717～1783)在1746年的论文[2]《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》中说，他提议证明无穷多种与正弦曲线不同的曲线是振动的模式．

我们也许记得在上一章中首次接触弦振动时，弦被当成"小珠的弦"，即弦被看成由 n 个离散的、相等的和等间隔的、彼此间用没有重量的柔软的弹性绳相连接的重物构成．为了处理连续的弦，重物的数目允许变成无穷多个，同时每一个的大小和质量都减小，使得当"珠子"个数增加时总质量趋近连续弦的质量．在取极限时存在着数学上的困难，不过这种细微的地方被忽视了．

John Bernoulli 在1727年(第21章第4节)处理了离散质量的情况．如果弦的长度是 l，位于 $0\leqslant x\leqslant l$，又如果第 k 个质量的横坐标是 x_k，$k=1, 2, \cdots, n$(在 $x=l$ 处的第 n 个质量是不动的)，那么

$$x_k=k\frac{l}{n},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

通过分析第 k 个质量上的力，Bernoulli 已经证明，如果 y_k 是第 k

(1) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 184～200, pub. 1740=*Opera*,(1), 22, 57～75.

(2) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 3, 1747, 214～219 和 200～249, pub. 1749.

个质量的位移,则

$$\frac{d^2y_k}{dt^2}=\left(\frac{na}{l}\right)^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

其中 $a^2=lT/M$, T 是弦中的张力(弦振动时它被当作常数), M 是总质量. D'Alembert 用 $y(t,\ x)$ 代替 y_k, 用 Δx 代替 l/n. 于是

$$\frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial t^2}=a^2\left[\frac{y(t,\ x+\Delta x)-2y(t,\ x)+y(t,\ x-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right].$$

然后他注意到当 n 变成无穷时 Δx 趋于 0, 方括号内的表达式就变成 $\partial^2 y/\partial x^2$. 因此

$$\frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y(t,\ x)}{\partial x^2}, \tag{1}$$

其中 a^2 现在是 T/σ, σ 是单位长度的质量. 这样一来, 现在称为一维的波动方程就第一次出现了.

因为弦固定在端点 $x=0$ 和 $x=l$, 所以解必须满足边界条件

$$y(t,\ 0)=0,\quad y(t,\ l)=0. \tag{2}$$

当 $t=0$ 时, 弦被拉到某形状 $y=f(x)$ 然后放开, 这意味着每一质点出发时初速为 0. 这些初始条件在数学上被表示为

$$y(0,\ x)=f(x),\quad \left.\frac{\partial y(t,\ x)}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{3}$$

它们也必须被解所满足.

这个问题被 d'Alembert 以现代教科书中还经常引用的非常巧妙的方法解出来了. 为了节省篇幅, 我们将不引全部细节. 他首先证明

$$y(t,\ x)=\frac{1}{2}\phi(at+x)+\frac{1}{2}\psi(at-x), \tag{4}$$

其中 ϕ 和 ψ 暂时还是未知函数.

至此 d'Alembert 已推出偏微分方程(1)的每个解都是 $(at+x)$ 的函数与 $(at-x)$ 的函数之和. 将(4)直接代入(1), 容易证明逆命题成立. 当然 d'Alembert 还必须满足边界条件和初始条件. 把

条件 $y(t, 0)=0$ 用于(4)，对一切 t 有

$$\frac{1}{2}\phi(at)+\frac{1}{2}\psi(at)=0. \tag{5}$$

因为对任一 x，$ax+t=t'$ 总对某一 t' 成立，我们可以说对任何 x 及 t 都有

$$\phi(x+at)=-\psi(x+at). \tag{6}$$

从(4)看出条件 $y(t, l)=0$ 变成

$$\frac{1}{2}\phi(at+l)=\frac{1}{2}\phi(at-l); \tag{7}$$

而由于上式对 t 恒等，这就证实了 ϕ 一定是关于 $at+x$ 的以 $2l$ 为周期的周期函数.

由(4)及 $\phi=-\psi$，条件

$$\left.\frac{\partial y(t, x)}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \tag{8}$$

产生出

$$\phi'(x)=\phi'(-x). \tag{9}$$

积分后变成

$$\phi(x)=-\phi(-x), \tag{10}$$

所以 ϕ 是 x 的奇函数. 如果现在在(4)中用 $\phi=-\psi$ 确定出 $y(0, x)$，并且用(10)，我们就有

$$y(0, x)=\phi(x), \tag{11}$$

而因初始条件是 $y(0, x)=f(x)$，我们便有

$$\phi(x)=f(x) \quad 当\ 0\leqslant x\leqslant l\ 时. \tag{12}$$

总结起来就有

$$y(t, x)=\frac{1}{2}\phi(at+x)-\frac{1}{2}\phi(at-x), \tag{13}$$

其中 ϕ 适合上述周期性和奇性的条件. 此外，如果初始状态是 $y(0, x)=f(x)$，则(12)必然在0到 l 之间成立. 这样，对给定的 $f(x)$ 应该恰有一个解. D'Alembert 当时认为函数是由代数和微

积分的步骤构成的解析表达式. 因此, 如果两个这样的函数在 x 的一个区间上相等, 它们必然对一切 x 相等. 因为在 $0\leqslant x\leqslant l$ 上 $\phi(x)=f(x)$, 而 ϕ 又具有奇性和周期性, 所以 $f(x)$ 必定适合同一组条件. 最后, 因为 $y(t, x)$ 要满足微分方程, 它必须是二次可微. 但 $y(0, x)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 也必须是二次可微的.

在看到 d'Alembert 1746 年论文的几个月内, Euler 写了他自己的论文«论弦的振动», 提出于 1748 年 5 月 16 日[3]. 虽然在解法上他沿用了 d'Alembert 的方法, 但这时, 在允许什么函数可以作为初始曲线, 因而也可以作为偏微分方程的解上, Euler 却有着全然不同的想法. 甚至在讨论弦振动问题之前, 事实上在 1734 年的一个工作中, 他就允许了由不同的熟知曲线的部分所构成的, 甚至是随手画出的曲线所构成的函数. 例如(图 22.1), 在区间 (a, c) 中由抛物线的弧, 在区间 (c, b) 中由三次曲线的弧组成的曲线在这种概念下构成了一条曲线或一个函数. Euler 称这样的曲线是不连续的, 虽然按照现代术语, 它们是有间断的导数的连续函数. 他在 1748 年的教科书«引论»中, 还在坚持十八世纪的标准概念: 函数必须用单一的解析表达式给出. 可是, 看来弦振动问题的物理学是促使他把他的函数新概念公开出来的使人非相信不可的理由. 他接受了在 $-l\leqslant x\leqslant l$ 中用公式 $\phi(x)$ 定义的任何函数, 并认为在 $(-l, l)$ 外 $\phi(x+2l)=\phi(x)$ 就是曲线的定义. 在后来的一篇论文[4]中, 他走得更远了; 他说对任意的 ϕ 和 ψ,

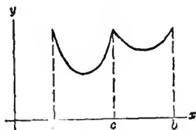


图 22.1

$$(14)\qquad y=\phi(ct+x)+\psi(ct-x)$$

(3) *Nova Acta Erud.*, 1749, 512～527＝*Opera*, (2), 10, 50～62; 也还有法文的, *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 4, 1748, 69～85＝*Opera*, (2), 10, 63～77.

(4) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 9, 1753, 196～222, pub. 1755＝*Opera*, (2), 10, 232～254.

都是方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{15}$$

的解．这可由代入微分方程推得．但是，无论初始曲线是由某一方程表示的，还是它是用不能以一个方程表示的任一方式描绘出来的，都同样是符合要求的．只有初始曲线在 $0\leqslant x<l$ 内的部分才与弦振动有关系．这部分之外的延伸无需考虑．所以，该曲线的不同部分并不按任一种连续性法则(单个的解析表达式)彼此连接；它们只被说成是连在一起的．由于这个原因，整条曲线不可能包含在一个方程内，除非曲线碰巧是某个正弦函数．

1755 年 Euler 给函数下了一个新定义："如果某些量这样地依赖于另一些量：当后者改变时它经受变化，那么称前者为后者的函数．"在另一篇文章[5]中他又说："不连续"函数的各部分彼此不属于对方，在函数的整个范围中也不能用一个方程来确定．此外，在 $0\leqslant x\leqslant l$ 内给定初始形状后，在 $-l\leqslant x\leqslant 0$ 中用反序重复它(使它是奇的)，并且设想在每一长为 $2l$ 的区间内不断重复这段曲线直到无穷远．那么，如果该曲线 $[y=f(x)]$ 被用来表示初值函数，经过时间 t 后，对应于振动的弦上横坐标 x 的纵坐标将是(参阅[13]和[12])

$$y=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct). \tag{16}$$

Euler 在他的 1749 年的基本论文中指出：振动弦的一切可能的运动，无论弦的形状怎样，关于时间都是周期的；也就是说，该周期(通常)是我们现在所谓的基本周期．他也认识到周期为基本周期的一半、三分之一、等等的单个的模式能够作为振动的图象出现．他给出这样的特解为

(5) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1765, 67～102, pub. 1767 = *Opera*, (1), 23, 74～91.

$$y(t,\ x)=\sum A_n \sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}, \tag{17}$$

如果初始形状是

$$y(0,\ x)=\sum A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{18}$$

的话．但是，他没有说明是对有限多个项还是对无穷多个项求和．然而他还是有了模式的迭加的思想．所以，Euler 与 d'Alembert 的主要分歧点是，他允许一切种类的初始曲线，因此，也就允许非解析解，而 d'Alembert 只接受解析的初始曲线和解析解．

Euler 在引进他的“不连续”函数时，他意识到了他已经向前迈进了一大步．1763 年 12 月 20 日他写信给 d'Alembert 说："考虑这类不服从连续性[解析性]法则的函数，为我们开辟了一个全新的分析领域．"[6]

Daniel Bernoulli 以全然不同的形式给出弦振动问题的解；这个工作激起了另一场关于可允许的解的争论．Daniel Bernoulli (1700～1782)是 John Bernoulli 的儿子，1725 年到 1733 年是圣彼得堡的数学教授，后来，在巴塞耳又相继是医学、形而上学和自然哲学的教授．他的主要工作是在流体动力学和弹性力学方面．在前一领域，他的关于潮汐流动的一篇论文赢得了奖金；他还打算把流体流动的理论应用到人类血管的血液流动上．他是一个熟练的实验家并通过实验在 1760 年前发现了静电荷的引力定律．这个定律通常被归于 Charles Coulomb. Bernoulli 的《流体动力学》(*Hydrodynamica*, 1738)是这个领域的第一本主要的教科书，书中包括曾在许多研究论文中出现过的课题．其中一章是热的力学理论(反对热是一种物质)，并给出了气体理论中的许多结果．

在前一章引用过的 1732/1733 年的论文中，Bernoulli 明确地说明振动的弦能有较高的振动模式．在后来一篇关于有载荷的垂

6) *Opera*, (2), 11, sec. 1, 2.

直柔软弦上重物的合成振荡的论文[7]中，他作了如下的说明：

> 类似地，绷紧的乐器弦能够以很多方式，甚至按理论上讲能以无穷多种方式，发生等时振动，……此外，在每一种模式中它发生较高的或较低的音调．当弦振动产生一个单拱的时候发生了第一个和最自然的模式；于是，弦产生最慢的振动，发出它的所有可能的音调中的最低音，对于其他一切音来说这是基音．下一个模式要求弦产生两个拱，位于（弦的静止位置的）两边，于是振动加快一倍，这时弦发出基音的高八度音．

然后他描述了更高的模式．但是，他没有给出数学的说明，不过，他有数学的思想好象是明显的．

在一篇关于杆的振动以及振动杆发出的声音的论文[8]中，Bernoulli 不仅给出杆振动的各个模式，而且还明确地说明两类声音（基音和高次谐音）能够同时存在．这是小谐振共存的第一次陈述．Bernoulli 基于对杆及声音怎样能发生作用的物理的理解，而不是从数学上证明两个模式的和是一个解．

当他见到 d'Alembert 1746 年的第一篇论文和 Euler 1749 年关于弦振动的文章后，他赶忙发表了他已有了多年的想法[9]．在任性地挖苦 d'Alembert 和 Euler 工作的抽象性之后，他再次断言振动弦的许多模式能够同时存在（于是这条弦响应所有这些模式的和或迭加），并且声称这就是 Euler 和 d'Alembert 所说明的全部内容．随后说到一个要点：他坚持全体可能的初始曲线可表成

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{19}$$

因为有足够的常数 a_n 使级数适合任一曲线．所以，他断定全体后

(7) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 12, 1740, 97～108, pub. 1750.

(8) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 13, 1741/1743, 167～196, pub. 1751.

(9) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 9, 1753, 147～172 和 173～195, pub. 1755.

继运动应是

$$y(t, x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}. \tag{20}$$

这样一来，每一个对应于任一初始曲线的运动不外乎是正弦周期模式的和，并且这一组合有着基音的频率．然而，他未给出数学论据以支持他的论点；他依靠物理．在1753年的文章中Bernoulli说：

> 我的结论是：一切能发声的物体都含有对应于无穷多种规则振动的无穷多种声音．……但是，这许多声音并不是d'Alembert先生和Euler先生所说的．……每一种类型[由某初始曲线产生的每一基本模式]乘以无穷多个倍数在每一区间上与无穷多条曲线相一致，使得每一点发生这些振动的，在同一瞬间也获得这些振动，而按照Taylor先生的理论，两节点间的每一区间内所应取得的形状都是极度拉长的相似旋轮线[正弦函数]．
>
> 那么我们要指出，弦AB不可能产生仅仅与第一图象[基音]或第二[第二谐音]或第三等等直到无穷的谐音相一致的振动，但它能够产生在一切可能组合中的这些振动的一个组合，而且，d'Alembert和Euler给出的一切新曲线都不过是Taylor振动的组合而已．

在这最后一段话里Bernoulli把Taylor从未展示过的知识归到Taylor身上了．然而，撇开这一点，Bernoulli的论点是极为重要的．

Euler马上反对Bernoulli的后一断言．事实上，Euler 1753年提交给柏林科学院（上面已经引用过）的文章就是部分地对Bernoulli两篇文章的一个回答．Euler强调了波动方程作为处理弦振动问题的出发点的重要性．他赞赏Bernoulli关于许多模式

能够同时存在使得在一个运动中弦能发出许多谐音的认识,但是,跟 d'Alembert 一样,他否认所有可能的运动能用(20)表出. 他承认形如

$$f(x)=\frac{c\sin(ax/l)}{1-a\cos(ax/l)},\quad |a|<1, \tag{21}$$

的初始曲线能用形如(19)的一个级数来表示. 如果每一个函数能被表成无穷三角级数,那么 Bernoulli 的论点就会得到证实,但是,Euler 认为这是不可能的. 他说: 正弦函数的和总是一个奇的周期函数,但是在他的解(见[16])

$$y(t, x)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct) \tag{22}$$

里, f 是任意的(在 Euler 的意义下是不连续的),因而肯定是不能被表成正弦函数的和的. 他说,实际上, f 能够是伸展到无穷远的 x 范围的弧的组合, 并且是奇的和周期的; 还因为它是不连续的(在 Euler 的意义下),所以它不能表作正弦曲线的和. 他断言他自己的解无论从哪方面来看都没有限制. 实际上, 初始曲线不需要能用一个方程(单独一个解析表达式)表出来.

正是在这种情况下, Euler 也针对 Maclaurin 级数说, 这是不能表示任何一个任意函数的; 所以,无穷正弦级数也不可能这样. 他所承认的一切就是 Bernoulli 的三角级数表示特解; 而他(Euler)本人确实在他自己的 1749 年的文章中就已经得到过这样的解(见[17]和[18]).

D'Alembert 在《百科全书》第 7 卷 (1757) 他写的关于"基音"的条目中也抨击 Bernoulli. 他不相信一切奇的周期函数能表成形如(19)的级数,因为这个级数是二次可微的,而全体奇的周期函数并不需要是这样. 然而,即使当初始曲线是足够多次可微的时候, ——并且 d'Alembert 在他的 1746 年的文章中确实要求了它是二次可微的——它也并不需要能表成 Bernoulli 的形式. 基于

同样的理由，d' Alembert 也反对 Euler 的不连续曲线．实际上，d'Alembert 要求初始曲线 $y=f(x)$ 必须二次可微是正确的，因为从在 x 的某一个或几个值上没有二阶导数的 $f(x)$ 得出的解，在这些奇点处必须满足一些特殊的条件．

Bernoulli 没有从他的看法后退．他在 1758 年的一封信[10]中照旧说：他有无穷多个系数 a_n 可供处置，从而适当地选择它们就能使级数(19)与任何函数 $f(x)$ 在无穷多个点上相一致．在任何情况下他坚持(20)是最一般的解．D'Alembert、Euler 和 Bernoulli 间的辩论持续近十年之久而未获一致．问题的实质在于能够用正弦级数，或更一般地，用 Fourier 级数表示的函数类的宽窄．

1759 年，年轻的尚不知名的 Lagrange 参加了争论．在他论述声音的性质与传播的论文[11]中，他给出了这个课题的一些成果，然后把他的方法用到弦振动上．他进行得好象他抓住了一个新问题，而只不过重复了 Euler 和 Daniel Bernoulli 在前面已经作过的很多工作．Lagrange 也是从负载着有限个相等的、等间隔的质量的弦出发，然后过渡到无穷多个质量的极限．虽然他批评 Euler 的方法要把结果限制为连续(解析)曲线，但 Lagrange 说他将证明 Euler 的结论——任一初始曲线能够合用——是正确的．我们将立即说到 Lagrange 对连续弦的结论．他已得到

$$y(x,\ t)=\frac{2}{l}\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}\sum_{q=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}dx\left[Y_q\cos\frac{c\pi rt}{l}+\frac{l}{r\pi c}V_q\sin\frac{c\pi rt}{l}\right]. \tag{23}$$

这里 Y_q 和 V_q 是第 q 个质量的初位移和初速度．然后他用 $Y(x)$ 和 $V(x)$ 分别代替 Y_q 和 V_q．Lagrange 把量

$$\sum_{q=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}Y(x)dx \quad 和 \quad \sum_{q=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}V(x)dx \tag{24}$$

(10) *Jour. des Sçavans*, March 1758, 157～166.

(11) *Misc. Taur.*, 1_3, 1759, i～x, 1～112＝*Œuvres*, 1, 39～148.

看作是积分，并且他把积分运算取在和号 $\sum_{r=1}^{\infty}$ 之外．由这些步骤得到

(25)
$$y(x,t)=\left(\frac{2}{l}\int_0^l Y(x)\sum_{r=1}^{\infty}\sin\frac{r\pi x}{l}dx\right)\sin\frac{r\pi x}{l}\cos\frac{r\pi ct}{l}+\left(\frac{2}{\pi c}\int_0^l V(x)\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx\right)\times\sin\frac{r\pi x}{l}\sin\frac{r\pi ct}{l}.$$

这里和号和积分号的交换不仅引导出发散级数，而且毁掉了 Lagrange 有可能认出

(26)
$$\int_0^l Y(x)\sin\frac{r\pi x}{l}\,dx$$

是 Fourier 系数的任何一点机会．经过其他冗长的、困难而又可疑的步骤之后，Lagrange 得到了 Euler 和 d'Alembert 的结果

(27)
$$y=\phi(ct+x)+\psi(ct-x).$$

他断定上述推导使得这位伟大的几何学家(Euler)的理论

> 毫无疑问，是建立在直接而清楚的原理之上的，这些原理决不依靠 d'Alembert 先生所要求的连续性［解析性］法则；此外，这就是怎么会发生以下情况的原因：当物体数目……有限时，曾经支持和证明了 Bernoulli 先生关于等时振动的复合的理论的同一个公式，当物体数目变成无穷多时……却向我们表明了它是不充分的．事实上，从一种情况过渡到另一种情况下这一公式经历的变化是：使得那些组成整个系统的绝对运动的简单运动大部分互相抵销了，而留下的那些简单运动又被歪曲和改变得完全不可认识了．令人气恼的是这样巧妙的理论在主要情况下竟被证实是谬误的，而所有出现在自然界中的小的相互运动可能都与这种情况互相关联．

所有这些几乎全是无意义的话.

Lagrange 在他的解无需对初始曲线 $Y(x)$ 和初速度 $V(x)$ 施加限制这一争论中,他的主要根据是:他没有对它们进行微分,但是,如果人们要把他所作的推导严密化,施加限制就是必要的了.

Euler 和 d'Alembert 批评 Lagrange 的工作,但是实际上并未击中要害;他们却偏偏挑中了 Euler 称之为"奇妙的计算"的细节. Lagrange 试图回答这些批评. 双方的答辩和反驳太广泛了,不能在这里叙述,尽管有很多确实揭示了那时的思想. 例如,Lagrange 当 $m=\infty$ 时用 $\frac{\pi}{m}$ 代替 $\sin\frac{\pi}{m}$, 并用 $\frac{\nu\pi}{2m}$ 代替 $\sin\frac{\nu\pi}{2m}$. D'Alembert 允许前一个但不允许后一个,因为所涉及的 ν 值与 m 是可比的. D'Alembert 还对形如

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots$$

的级数可能是发散的提出异议,而 Lagrange 用作答复的是当时很普通的论点,即级数的值就是这级数所由之而来的函数的值.

虽然 Euler 确实批评了 Lagrange 的数学细节,但他在 1759 年 10 月 23 日的信[12]中对 Lagrange 的文章作了全面的答复,他赞扬了 Lagrange 的数学技巧,并且说这使得争论避免了任何诡辩,还说每个人现在必须认识到不规则的以及(按 Euler 的意义下)不连续的函数在这类问题中的用处.

1759 年 10 月 2 日, Euler 给 Lagrange 写道:"我高兴地读到你赞成我的解……而 d'Alembert 却百般挑剔试图暗中败坏它,唯一的原因在于他自己没能得到它. 他曾吓唬说要发表一篇有分量的反驳;是否他真正这样作了我不知道. 他想他能够用他的雄辩来欺骗半通者. 我怀疑他是否严肃,要不也许他是完全被自私蒙住了眼睛."[13]

(12) Lagrange, *Œuvres*, 14, 164~170.

(13) *Œuvres*, 14, 162~164.

在1760/1761年Lagrange试图回答d'Alembert和Bernoulli在信件来往中提出的批评，他给出了弦振动问题的一个不同的解[14]．这次他直接从波动方程($c=1$)出发，利用乘上一个未知函数以及另外的一些步骤把偏微分方程归结为解两个常微分方程．然后，又通过更多的不全是正确的步骤，Lagrange得到解

$$y(t, x)=\frac{1}{2}f(x+t)+\frac{1}{2}f(x-t)-\frac{1}{2}\int_0^{x+t}g\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{x-t}g\,dx,$$

这里$f(x)=y(0, x)$和$g(x)=\partial y/\partial t$(当$t=0$时)是给定的初始条件．如同Lagrange所证明的，这与d'Alembert的结果是一致的．但是后来，没有引用他自己的工作，他试图使他的读者相信，他对初始曲线没有用到任何连续性(解析性)法则．确实的，他对初始函数没有使用任何直接的微分运算．但是，也就是在这篇文章中，为了严密地证明他的极限过程，就不能回避关于初始函数的连续性和可微性的假设．

激烈的争论贯穿了十八世纪的整个六十年代和七十年代，甚至Laplace也在1779年参加到这场吵闹中来了[15]，并且站在d'Alembert一边．在1768年开始出现的题名为《短文集》(*Opuscules*)的小丛书中，d'Alembert继续这场辩论．他反驳Euler，理由是Euler允许太一般的初始曲线，又反驳Daniel Bernoulli，理由是他(d'Alembert)的解不能表成正弦曲线的和，因此Bernoulli的解不够一般．三角函数的无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$可以被作得适合于任一初始曲线，因为它有无穷多个$a_n$可供确定，这种想法(Daniel Bernoulli有这样的主张)被Euler作为办不到的事情而拒不接受．他还提出这样的问题：当初始时刻只有弦的一部分被扰动时，一个三角级数怎样能表示这样的初始曲线．Euler、

(14) *Misc. Taur.*, 2_2, 1760/1761, 11～172, pub. 1762=*Œuvres*, 1, 151～316.

(15) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1779, 207～309, pub. 1782=*Œuvres*, 10, 1～89.

d'Alembert 和 Lagrange 始终否认三角级数能够表示任一解析函数，更不用说更加任意的函数了.

每个人提出的许多论据大体上是不正确的；而其结果，在十八世纪内，也是没有说服力的. 用三角级数来表示一个任意函数这一重要问题，直到 Fourier 着手研究之前一直没有得到解决. Euler、d'Alembert 和 Lagrange 虽然到了发现 Fourier 级数的意义的门槛边沿，但是却没有鉴别出摆在他们面前的是什么东西. 用当时的知识来判断，所有这三个人和 Bernoulli 在他们的主要的争论中都是正确的. D'Alembert，循着 Leibniz 时期建立的传统，坚持函数必须是解析的，因而认为任何在这种意义上不能解的问题就是不可解的. 他在给出 $y(t, x)$ 关于 x 必须是周期的论证方面也是正确的. 但是，他没有认识到：在某区间上，例如说，在 $0 \leqslant x \leqslant l$ 上，给定了一个任意的函数，那末就可以对整数 n，在每一区间 $[nl, (n+1)l]$ 内重复这个函数使它成为周期的. 当然，这类周期函数有可能不能用一个(闭)公式来表示. Euler 和 Lagrange (至少在他们的时代) 相信不是所有的“不连续”函数都能表成 Fourier 级数，这是合理的. 然而也同样正确的是，他们相信(可是他们没有证明) 初始曲线能够是非常一般的函数. 它既不必是解析的，也不必是周期的. Bernoulli 确实在物理基础上采取了正确的立场，但他不能用数学来支持它.

在函数的三角级数表示问题上的争论的一个非常奇怪的特点是：所有卷入的人都知道非周期函数(在一个区间内)能够被表成三角级数. 第 20 章 (第 5 节) 的引证就说明，Clairaut、Euler、Daniel Bernoulli 和其他一些人实际上获得了这样的表达式；他们的很多文章也有求三角级数系数的公式. 事实上所有这些工作在 1759 年都出版了，在这一年 Lagrange 提出了他的关于振动弦的基本论文. 所以，他本来是可以推出任一函数都有三角展开式，并能够以确定的形式指出系数公式的，但是他没有能这样作. 仅仅

是在1773年，当激烈的争论已经过去，Daniel Bernoulli 确实才注意到一个三角级数的和在不同区间内可表示不同的代数表达式．为什么所有这些结果都没有影响关于弦振动的辩论呢？可以从几方面来解释．很多关于用三角级数表示非常一般的函数的结果是在天文学的论文中，因此 Daniel Bernoulli 可能没有读到它们，以至不能指出它们来捍卫他的立场．Euler 和 d'Alembert 他们必然是知道 Clairaut 1757 年的工作的(第20章第5节)，但是也许不喜欢研究它，因为该文驳斥了他们自己的论点．而且 Clairaut 所作的这个天文学上的工作很快就被废弃和忘却了．另一方面，尽管 Euler 用了三角级数——如象在他的内插理论中——表示多项式表达式，但他并不接受十分任意的函数都能够这样表示的一般事实；当他用到这种级数表示式时，它们的存在性是用别的方法保证的．

另一个问题是，具有解析系数(例如常系数)的偏微分方程为什么能有非解析解，这个问题也没有真正弄清楚．在常微分方程的情形，如果系数解析，解必然也是解析的．但是，对偏微分方程这就不对了．虽然，Euler 正确地指出具有角点的解是允许的(并且他坚持这一点)，但是偏微分方程的解中可允许的奇性的确定则是很久以后的事了．

3. 波动方程的推广

正当弦振动问题的论战还在进行的时候，对乐器的兴趣引起了进一步的工作，不仅有物理结构的振动方面的，而且还有与声音在空气中传播有关的水力学问题方面的．从数学上来说，这些问题都牵涉到波动方程的推广．

在1762年 Euler 着手研究粗细可变弦的振动问题，他曾受到一个音乐审美学主要问题的推动．Jean-Philippe Rameau (1683

～1764)在1726年阐明乐音的和谐乃是由于下述事实：任一声音的音调的成分是基音的音调的泛音；也就是说，它们的频率是基音频率的整数倍．但是，Euler在他的《音乐理论的新颖研究》(1739)[16]中主张只是在合适的乐器里才有基调的和谐的泛音．于是他力图证明变粗细的或有不均匀密度$\sigma(x)$及张力T的弦发出不和谐的泛音．

现在偏微分方程变成

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{28}$$

而其中c是x的函数．第一个重要的结果是由Euler在"粗细不匀弦的振动"一文[17]中得到的．Euler断言求其通解超过了分析的能力，他得到当给定质量分布为

$$\sigma=\frac{\sigma_0}{\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^4}$$

的特殊情况时的一个解，其中σ_0和α是常数．那么

$$y=\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left[\phi\left(\frac{x}{1+\frac{x}{\alpha}}+c_0t\right)+\psi\left(\frac{x}{1+\frac{x}{\alpha}}-c_0t\right)\right],$$

这里$c_0=\sqrt{T/\sigma_0}$．模式或谐音的频率由

$$\nu_k=\frac{k}{2l}\left(1+\frac{l}{\alpha}\right)\sqrt{T/\sigma_0},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

给出，所以，相继两个频率的比值和粗细均匀的弦振动的相继两个频率的比是相同的，但是基音的频率不再与长度成反比例．

在1762/1763年的这篇文章中，Euler还考察由不同的粗细m、n，分别长a，b的两段弦连接而成的弦的振动．他推导了各个模式的各个频率ω的方程．这些都终于被证明是

(16) *Opera*, (3), 1, 197～427.

(17) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1762/1763, 246～304, pub. 1764＝*Opera*, (2), 10, 293～343.

$$m\operatorname{tg}\frac{\omega a}{m}+n\operatorname{tg}\frac{\omega b}{n}=0 \tag{29}$$

的解，而且他在特殊情况下解得了 ω. (29) 的解称为该问题的特征值或本征值. 我们将会看到，这些值在偏微分方程理论中有根本的重要性. 从(29)显然可见特征频率不是基频的整数倍.

然而，Euler 在另一篇关于粗细可变的弦振动问题的文章[18]中再次研究这个问题，他从(28)出发，证明了存在函数 $c(x)$，对它说来较高音调的频率不是基频的整倍数.

D'Alembert 也研究了变粗细弦[19]. 这里他用了他早些时候对常密度弦引进的一种重要解法. 前些时候在试图解弦振动问题时 d'Alembert 引进了分离变量的思想，这是现在解偏微分方程的一种基本方法[20]. 为解方程

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2},$$

d'Alembert 令

$$y=h(t)g(x),$$

代入微分方程，得到

$$\frac{1}{a^2}\frac{h''(t)}{h(t)}=\frac{g''(x)}{g(x)}. \tag{30}$$

然后，象我们现在所作的一样，他论证由于 g''/g 当 t 变化时不变，它必是常数，类似的论证也适用于 h''/h，这个表达式也必须是常数. 这两个常数相等，并记之为 A. 这样他得到两个分离的常微分方程

$$\begin{aligned}&h''(t)-a^2Ah(t)=0,\\&g''(x)-Ag(x)=0.\end{aligned} \tag{31}$$

因为 a 和 A 是常数，上述每个方程都容易求解，d'Alembert 得到

(18) *Misc. Taur.*, 3, 1762/1765, 25～59, pub. 1766＝*Opera*, (2), 10, 397～425.
(19) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 19, 1763, 242 ff., pub. 1770.
(20) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 6, 1750, 335～360, pub. 1752.

$$y(t, x)=h(t)g(x)=[Me^{a\sqrt{\lambda}t}+Ne^{-a\sqrt{\lambda}t}]\cdot[Pe^{\sqrt{\lambda}x}+Qe^{-\sqrt{\lambda}x}].$$

端点条件 $y(t, 0)=0$ 和 $y(t, l)=0$ 使 d'Alembert 断定 $g(x)$ 必然形如 $k\sin Rx$, 而 $h(t)$ 也必有同样的形式, 因为 $y(t, x)$ 对 t 必是周期的. 他把问题就搁在那里了. Daniel Bernoulli 在 1732 年处理一端吊起的链的振动时曾经用了分离变量的思想, 但是, d'Alembert 更为明确,尽管他没有完成这种解法.

D'Alembert 在他的 1763 年的文章中,把波动方程写成

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

并寻找形状为

$$u=\zeta(x)\cos\lambda\pi t$$

的解. 对 ζ 他得到方程

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}=-\frac{\lambda^2\pi^2\zeta}{X(x)}. \tag{32}$$

现在 d'Alembert 必须确定 ζ, 使得在弦的两端, ζ 是 0. 经过详细的分析, 他证明存在 λ 的一些值, 对这样的值, ζ 满足这些条件. 可是, 在这里他确实没有洞察到存在着无穷多个 λ 的值. 这类研究的重要性在于, 它是常微分方程边值或特征值问题方向上的另一个步骤.

连续水平重绳的横振动受到 Euler 的研究. 在《弦自身重力对弦运动的效应修正》[21]一文中,他得到微分方程

$$\frac{1}{c^2}y_{tt}=\frac{g}{c^2}+y_{xx}.$$

对于 c 为常数及在端点 $x=0$、$x=l$ 处固定的情形, Euler 求得

$$y=-\frac{(1/2)gx(x-l)}{c^2}+\phi(ct+x)+\psi(ct-x).$$

这样一来,除去产生了一个对称抛物线图象

(21) *Acta Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1781, 178~190, pub. 1784 = *Opera*, (2), 11, 324~334, 但注明日期是从 1774 开始.

$$y = -\frac{(1/2)gx(x-l)}{c^2}$$

的振动之外，结果与“无重量”的弦(即重量被忽略的)一样.

马上我们就要看到，Euler 在鼓振动的文章中(也可见第21章第4、6节)引进了全部第一类 Bessel 函数，而且在这篇发表于1781年的文章中他注意到用 Bessel 函数的级数表示任一运动是可能的[尽管他不同意 Daniel Bernoulli(在弦振动问题中)关于任一函数能表成三角函数级数的主张].

直到本世纪末，别的很多人还在发表关于振动弦和悬链的文章，前面提到过的文章仅仅是这类文章的代表. 作者们继续持不同意见，互相纠正，并在这样做的时候犯种种错误，其中包括与他们自己以前讲过的甚至是证明过的相矛盾的东西. 他们是在不严密的论证的基础上，并且常常在恰恰是个人的偏爱和执信的基础上作出断言、论点和反驳的. 他们为了证明他们的论点而引用的文章并没有证明他们所主张的东西. 他们还求助于使用挖苦、讽刺、谩骂和自吹自擂等办法. 与这些攻击混杂在一起的是为了求宠，特别是为了求宠于 d'Alembert (因为他对普鲁士的 Frederich II 有相当大的影响，又是柏林科学院的领导)而表现出的表面上的一致.

迄今为止讲到的二阶偏微分方程只包含一个空间变量和时间. 十八世纪也没有超出这个范围太远. Euler 在1759年的一篇文章[22]中研究了矩形鼓的振动，这就考虑了二维物体. 对于鼓表面的垂直位移 z，Euler 得到方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{33}$$

其中 x 和 y 代表鼓上任一点的坐标，c 由质量和张力确定. Euler 试用

(22) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 243～260, pub. 1766=*Opera*, (2), 10, 344～359.

$$z=v(x,\ y)\sin(\omega t+\alpha)$$

求解，并发现

$$0=\frac{\omega^2 v}{c^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

这个方程有形如

$$v=\sin\left(\frac{\beta x}{a}+B\right)\sin\left(\frac{\gamma y}{b}+C\right)$$

的正弦形解，这里

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\gamma^2}{b^2}.$$

鼓的尺寸是 a 和 b，所以 $0\leqslant x\leqslant a$ 和 $0\leqslant y\leqslant b$. 当初速为 0 时，B 和 C 可取为 0. 如果边界固定，则 $\beta=m\pi$ 和 $\gamma=n\pi$，其中 $m,\ n$ 是整数. 于是由于 $\omega=2\pi\nu$（此处 ν 是每秒频率），他立即得到频率是

$$\nu=\frac{1}{2}c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$

然后，他考虑圆形鼓，把(33)变换成极坐标(一个具有高度独创性的步骤)，得到

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2}. \tag{34}$$

他用形式

$$z=u(r)\sin(\omega t+A)\sin(\beta\phi+B) \tag{35}$$

试解，因此 $u(r)$ 满足

$$u''+\frac{1}{r}u'+\left(\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{\beta^2}{r^2}\right)u=0. \tag{36}$$

这里出现了通用形式的 Bessel 方程(参阅第 21 章第 6 节). 接着，Euler 计算一个幂级数解

$$u\left(\frac{\omega}{c}r\right)=r^\beta\left\{1-\frac{1}{1(\beta+1)}\left(\frac{\omega}{c}\frac{r}{2}\right)^2+\frac{1}{1\cdot 2(\beta+1)(\beta+2)}\left(\frac{\omega}{c}\frac{r}{2}\right)^4+\cdots\right\},$$

这可以用我们现在的记号写成

$$u\left(\frac{\omega}{c}r\right)=\left(\frac{c}{\omega}\right)^{\beta}2^{\beta}\Gamma(\beta+1)J_{\beta}\left(\frac{\omega}{c}r\right).$$

因为边缘 $r=a$ 必须保持固定，所以

$$J_{\beta}\left(\frac{\omega}{c}a\right)=0. \tag{37}$$

因为 z 必须关于 ϕ 以 2π 为周期，从(35)可推知 β 是一整数. Euler 断言，对一固定的 β 存在无穷多个根 ω，所以可发出无穷多种单音. 然而，他没有算出这些根来. 他确曾试图寻求(36)的第二个解，但是失败了. Poisson[23] 独立地得到了膜振动理论，通常把这完全归于他.

Euler、Lagrange 和其他人都对声音在空气中的传播进行了研究. Euler 从 20 岁 (1727 年) 起经常写关于声音这一主题的文章，并把这一领域建成数学物理的一个分支. 这门学科中他最好的工作是 1750 年代关于水力学的一些重要论文. 空气是可压缩的流体，因而声音的传播理论是流体力学的一部分(因为空气也是弹性介质，它也是弹性力学的一部分). 然而，为了处理声音的传播，他对水力学的一般方程组作了合理的简化.

三篇很好的决定性的论文 1759 年在柏林科学院宣读了，第一篇《论声的传播》[24] 中，Euler 考虑声音在一维空间中的传播，经过一些近似，相当于考虑小振幅的波动之后他导出一维波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=2gh\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

其中 y 是波在点 x 和时间 t 的振幅，g 是重力加速度，h 是与压强和密度有关的常数. 这个方程，Euler 当然知道它和弦振动方程是一样的，因而在解这个方程时他没有在数学上作出什么新东西.

(23) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, (2), 8, 1829, 357～570.

(24) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 15, 1759, 185～209, pub. 1766=*Opera*, (3), 1, 428～451.

在第二篇文章(25)中，Euler 给出了二维传播方程，形如

$$
(38)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + c^2\frac{\partial^2 y}{\partial X\partial Y},\\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2\frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} + c^2\frac{\partial^2 x}{\partial X\partial Y},
\end{aligned}
$$

其中 x 和 y 分别是波在 X 方向和 Y 方向的振幅，或位移的分量，而 $c=\sqrt{2gh}$. 他给出平面波解

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha\phi(\alpha X+\beta Y+c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t),\\
y &= \beta\phi(\alpha X+\beta Y+c\sqrt{\alpha^2+\beta^2}t),
\end{aligned}
$$

这里 ϕ 是任意函数，而 α, β 是任意常数. 然后令

$$
(39)\qquad v=\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial y}{\partial Y}
$$

(v 称为位移的散度)，他就得到二维波动方程

$$
(40)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}.
$$

他还指出，为了得到问题的最一般的解以便适合某些初始条件，也就是说，v 或 x, y 在 $t=0$ 的值，必须把解迭加起来.

然后，Euler 还展示他怎样得到其解称为圆柱波的微分方程，圆柱波的得名是因为波的传播象一个扩展开去的圆柱面. 他令 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 并引入 $v=f(Z,t)$，这里 f 是任意的. 再令 $x=vX$ 和 $y=vY$，他从(40)得到

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{3}{Z}\frac{\partial v}{\partial Z}+\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2}.
$$

在同一篇文章中，他还用类似的方式得到三维波动方程

$$
(41)\qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2},
$$

这里 v 仍然是位移(x, y, z)的散度. 利用刚才对柱面波指出的那种变换，Euler 给出平面波解和球面波解. 球面波的基本方程是

(25) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 15, 1759, 210～240, pub. 1766=*Opera*, (3), 1, 452～483.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=\frac{4}{V}\frac{\partial s}{\partial V}+\frac{\partial^2 s}{\partial V^2},\quad V=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.$$

关于球面波和柱面波的上述很多结果，也曾由 Lagrange 在1759年末独立地作出．他们每个人都把自己的结果通知对方．虽然 Lagrange 的工作中有很多细节与 Euler 的不同，但没有什么数学上的要点值得在此叙述．

研究声波在空气中的传播只是为了研究那些利用空气运动发声的乐器的一个步骤．这种研究是由 Daniel Bernoulli 在1739年开创的．Bernoulli、Euler 和 Lagrange 写了许许多多涉及到由种类繁多到难以置信的这类乐器所发出的音调的论文．1762年 Daniel Bernoulli 在一个出版物(26)中证明，在圆柱形管（风琴管）的开的一端不能发生空气的压缩，在封闭的一端空气质点一定处于静止状态．他由此得出结论：两端封闭的或两端开口的管子，与长度减半一端开口一端封闭的管子有相同的基本模式．他还发现了风琴管泛音的频率是基音频率奇数倍的定理．在同一篇文章中，Bernoulli 还研究了圆柱形以外的管，特别是锥形管，对此他得到单个音调(模式)的表示式，而且认识到这些式子仅仅对无穷长的锥成立，而对截下一段的锥不成立．他还证明了(无穷长)锥形管的泛音与基音是和谐的．Bernoulli 用实验来证实了他的很多理论上的结果．

Euler 也研究了圆柱形管和非圆柱图形的旋转面(27)，考察了开口端和封口端的反射．这些人致力于了解长笛；管风琴；双曲面形的、锥形的和圆柱形的各类喇叭；小号；军号和别的管乐器．

总之，关于解三、四个变量的偏微分方程的这些努力受到了限制，主要因为，与分别表成 x 和 t 的简单的三角级数相反，现在解要表成包含多个变量的级数．但是，数学家们对出现在这类更复

(26) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1762, 431～485, pub. 1764.

(27) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16, 1771, 281～425, pub. 1772＝*Opera*, (2), 13, 262～369.

杂的级数中的函数，以及确定系数的方法却知道得太少了．这样的方法很快得到了发展．

值得提到的是，Euler 在考虑铃的声音时，以及在重新考虑杆振动的某些问题时，引出了四阶偏微分方程．不过，他不能对此作很多的事，事实上，这个世纪其余时间内在这方面也没有什么进展．

4. 位势理论

偏微分方程这门学科的发展受到另一类物理研究的推进．十八世纪的主要问题之一是确定一个物体对另一物体作用的万有引力的大小，最重要的情况是：太阳对一个行星，地球对它外部或内部的一个质点，地球对另一连续质量的引力．当两个物体的质量比起其大小来差得非常远时，它们是可以当作质点处理的；但是在别的情况下，特别是在地球吸引一个质点时，就必须考虑地球的大小．很显然，如果要计算地球的质量分布对一质点或对另一质量分布的万有引力，就必须知道地球的形状．虽然，它的精确形状仍是一个研究的课题(第 21 章第 1 节)，但在 1700 年左右就已经清楚地知道它一定是某种形状的椭球体，也许是一个扁球体(一椭圆绕其短轴旋转形成的椭球体)．在计算实心扁球体对一个外部质点和一个内部质点所作用的引力时，都不能把扁球体质量看作集中在中心．

Maclaurin 在 1740 年关于潮汐的获奖论文和他的《流数论》(*Treatise of Fluxions*, 1742)中证明了，对以等角速度转动的密度均匀的流体，扁球形是一种平衡形状．后来，Maclaurin 综合地证明了：给定两个共焦的均匀旋转椭球体，它们对外部同一质点的吸引力，当这个质点位于旋转轴的延长线上或位于赤道平面内时，与两物体的体积成比例．一些别的受局限的结果在十九世纪中也

由 James Ivory (1765～1842) 和 Michel Chasles 用几何方法建立.

Newton, Maclaurin 和其他人用于万有引力问题的几何方法仅仅对于特殊的物体和特殊位置上的被吸引质量才是有效的. 这种方法很快就让位给分析方法了, 在 Clairaut 的文章中, 特别是在他的名著《关于地球形状的理论》(*Théorie de la figure de la terre*, 1743) 中, 首次发现了这种方法, 在该书中他同时考虑了地球的形状和万有引力二者.

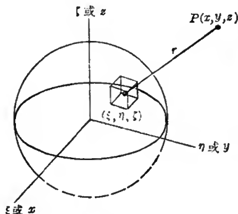


图 22.2

让我们先看一下关于分析上确切阐述的一些事实. 一个连续体对一个被看作质点的单位质量 P 所作用的万有引力是构成该物体的全体小质量所作用的力的总和. 如果物体的小体积元 $d\xi d\eta d\zeta$ (图 22.2) 如此之小, 以至可看作集中在点 (ξ, η, ζ) 的一个质点, 此外, 如果 P 的坐标是 (x, y, z), 那么, 密度为 ρ 的小质量对单位质点的引力是从 P 指向小质量的一个向量, 按牛顿万有引力定律, 这向量的分量是(第 21 章第 7 节)

$$-k\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,\quad -k\rho\frac{y-\eta}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,\quad -k\rho\frac{z-\zeta}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

其中 k 是牛顿定律中的常数, 并且

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

当然 ρ 可以是 ξ, η, ζ 的函数, 或者, 在均匀物体的情况下是一个常数.

整个物体对 P 处单位质量的引力分量是

$$f_x=-k\iiint\rho\frac{x-\xi}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$(42)\qquad f_y=-k\iiint\rho\frac{y-\eta}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,$$

$$f_z = -k\iiint \rho\,\frac{z-\zeta}{r^3}\,d\xi d\eta d\zeta,$$

其中积分展布在整个吸引体上．这些积分是有限的，当 P 在吸引体内部时也是正确的．

为了代替分别处理力的每个分量，可引入一个函数 $V(x, y, z)$，它对 x, y, z 的偏导数分别是力的三个分量．这个函数就是

$$V(x, y, z) = \iiint \frac{\rho}{r}\,d\xi d\eta d\zeta. \tag{43}$$

在积分号下对包含在 r 内的 x, y, z 求微分可得

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{k} f_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{k} f_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{k} f_z,$$

这些方程当 P 在吸引体内部时也成立．函数 V 称为势函数．当包含三个分量 f_x, f_y 和 f_z 的问题能化归为对 V 的问题时，这样用一个函数代替三个函数来作是很有好处的．

如果知道物体内部的质量分布，亦即 ρ 是 ξ, η, ζ 的已知函数，如果又知道物体的精确形状，有时就能通过实际计算积分值来算出 V．可是，对大多数形状的物体，这个三重积分是不能用简单函数积出来的．此外，我们也不知道地球或其他物体内部的真实的质量分布．因此，V 必须用其他方法来确定．关于 V 的主要事实是：对吸引体外部的点 (x, y, z)，它满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{44}$$

注意其中 ρ 不出现．这个微分方程称为位势方程，也叫做 Laplace 方程．

从势函数能够导出力的想法，甚至"势函数"这个术语本身，都由 Daniel Bernoulli 在《流体动力学》(1738) 中用过．位势方程本身首次出现在 Euler 1752 年编写的重要论文《流体运动原理》[28]

(28) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1756/1757, 271～311, pub. 1761 = *Opera*, (2), 12, 133～168.

中. 在处理流体内任一点的速度分量 u, v 和 w 时, Euler 曾证明 $udx+vdy+wdz$ 必定是一个恰当微分. 他引进函数 S, 使得 $dS=udx+vdy+wdz$, 于是

$$u=\frac{\partial S}{\partial x},\quad v=\frac{\partial S}{\partial y},\quad w=\frac{\partial S}{\partial z}.$$

但是不可压缩流体的运动遵从所谓连续性定律, 即

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{45}$$

这在数学上表达了运动过程中既没有物质被消灭也没有物质产生这个事实. 于是由此推得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}=0.$$

怎样一般地解这个方程呢, Euler 说, 不知道; 所以, 他仅仅考察 S 是 x, y, z 的多项式的特殊情况. 函数 S 后来(1868)被 Helmholtz 称为速度势. Lagrange 在 1762 年发表的一篇文章中[29]重新得到了所有这些量, 这是从 Euler 那里接受过来而未正式申明的, 虽然他确实改善了思路和表达的条理.

在我们能够研究为了求解代表万有引力的位势方程而作的工作之前, 我们必须回顾一下那些通过积分(42)或它在别的坐标系中的等价公式来直接计算吸引力数值的那些努力.

Legendre 在写于 1782 年而发表于 1785 年的题为《球状体吸引力的研究》[30]的论文中, 对旋转体的引力感兴趣, 证明了定理: 如果旋转体对位于轴的延长线上每一外点的引力已知, 则它对每一外部点的引力也就知道了. 他先通过

$$P(r,\theta,0)=\iiint\frac{(r-r')\cos\gamma}{(r^2-2rr'\cos\gamma+r'^2)^{3/2}}r'^2\sin\theta' d\theta' d\phi' dr' \tag{46}$$

表示沿矢径 r 方向的吸引力的分量, 这里(图 22.3) r 是被吸引点

(29) *Misc. Taur.*, 2_2, 1760/1761, 196~298, pub. 1762 = *Œuvres*, 1, 365~468.
(30) *Mém. des sav. étrangers*, 10, 1785, 411~434.

的矢径，r' 是吸引物体上的任一点的矢径，γ 是这两个矢径在物体中心处的夹角。因为物体是绕 z 轴旋转生成的图形，故外点的 ϕ 坐标可取作 0. 然后，他把被积函数按 $\frac{r'}{r}$ 的方幂展开. 为了作到这一点，他把分母写成

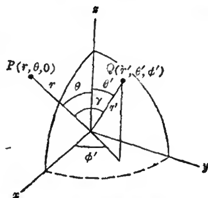


图 22.3

$$r^3\left[1-\left(2\frac{r'}{r}\cos\gamma-\frac{r'^2}{r^2}\right)\right]^{3/2},$$

再把方括号内的量移到分子上去，然后用二项式定理来展开，把圆括号内的量作为二项式的第二项. 除开体积元之外，Legendre 得到被积表达式是级数

$$\frac{1}{r^2}\left\{1+3P_2(\cos\gamma)\frac{r'^2}{r^2}+5P_4(\cos\gamma)\frac{r'^4}{r^4}\right.$$
$$\left.+7P_6(\cos\gamma)\frac{r'^6}{r^6}+\cdots\right\},$$

其中系数 P_2, P_4, …都是 $\cos\gamma$ 的有理整函数. 这些函数就是现在我们所谓的 Legendre 多项式，或 Laplace 系数或带调和函数. Legendre 给出了这些函数的形式，从而可以推得一般的 P_n，即

$$(47)\qquad P_n(x)=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots1}{n!}\cdot\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}+\cdots\right].$$

他于是就能对 r' 求积分而得到

$$\frac{2}{r^2}\iiint\left\{\frac{R^3}{3}+\frac{3}{5}P_2(\cos\gamma)\frac{R^5}{r^2}\right.$$
$$\left.+\frac{5}{7}P_4(\cos\gamma)\frac{R^7}{r^4}+\cdots\right\}\sin\theta'd\theta'd\phi',$$

此处 $R=f(\theta')$ 是 r' 在给定的 θ' 处的值(它不依赖于 ϕ'). 他于是

又需对 ϕ' 求积. 为此他利用[31]

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\phi'.$$

在建立了辅助的结果

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi P_{2n}(\cos\gamma)\,d\phi'=P_{2n}(\cos\theta)P_{2n}(\cos\theta')$$

之后, 他终于得到了

$$P(r,\ \theta,\ 0)=\frac{3M}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-3}{2n-1}P_{2n}(\cos\theta)\frac{\alpha_n}{r^{2n}},$$

其中

$$\alpha_n=\frac{4\pi}{3M}\int_0^{\pi/2}R^{2n+3}P_{2n}(\cos\theta')\sin\theta'd\theta'.$$

积分值依赖于子午线 $R=f(\theta')$ 的形状.

然后, Legendre 从上面的结果并在同 Laplace 通信的基础上得到了关于这个问题的势函数的表达式, 并从势推出垂直于矢径的引力分量.

在 1784 年写的第二篇文章[32]中, Legendre 推导出函数 P_{2n} 的一些性质. 例如, 对每一个关于 x^2 的次数低于 n 的 x^2 的有理整函数都有

$$\int_0^1 f(x^2)P_{2n}(x)\,dx=0. \tag{48}$$

如果 n 是任一正整数, 则

$$\int_0^1 x^n P_{2m}(x)\,dx=\frac{n(n-2)\cdots(n-2m+2)}{(n+1)(n+3)\cdots(n+2m+1)}. \tag{49}$$

如果 m 和 n 是正整数, 则

---

(31) 这个表达式推导如下: 由于球坐标到直角坐标的变换方程是 $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$, P 的直角坐标是 $(r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)$, Q 的直角坐标是 $(r'\sin\theta'\cos\phi',\ r'\sin\theta'\sin\phi',\ r'\cos\theta')$. 于是我们可用距离公式表示 PQ, 但按余弦定理 $\overline{PQ}^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma$. 让 PQ 的两个表达式相等就给出上述 $\cos\gamma$ 的表达式.

(32) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1784, 370~389, pub. 1787.

$$(50)\qquad \int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{当 } m\gtrless n,\\ \dfrac{1}{4m+1} & \text{当 } m=n.\end{cases}$$

他还证明了每个 P_{2n} 的零点都是实数，彼此不相同，关于 0 对称，且绝对值小于 1. 还有当 $0<x<1$ 时，$P_{2n}(x)<1$.

然后，借助正交条件(50)，他用级数逐项积分法证明了：一个给定的 x^2 的函数能用唯一的方式表成函数 $P_{2n}(x)$ 的级数.

最后，运用他的多项式的这些和其他一些性质，Legendre 回到了万有引力的主要问题上，并用位势的表达式(43)及旋转流体质量的平衡条件，他得到该质量的，表成他的多项式的级数形式的子午线方程. 他相信这个方程包括了关于旋转球体的一切可能的平衡形态.

现在 Laplace 登场了. 他写了几篇关于旋转体引力的论文(1772, 出版于 1776; 1773, 出版于 1776; 1775, 出版于 1778)，文中他用的是力的分量而不是势函数. 受到 Legendre 写于 1782 年发表于 1785 年那篇论文的激发，Laplace 写了著名的值得注意的第四篇文章《球状体和行星状物体的引力理论》[33]. 文中没有提到 Legendre, Laplace 研究的是与 Legendre 的旋转图形不同的任意球状体的引力问题，所谓球状体(其表面)，Laplace 是指用 r, θ, ϕ 的一个方程给出的任一曲面.

他从下述定理出发：任意物体作用在它外部一点的引力的势 V，若用球坐标 r, θ, ϕ 表示并取 $\mu=\cos\theta$ 时，必定满足位势方程

$$(51)\qquad \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}+r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}=0.$$

Laplace 在这里没有说明他是怎样得到这个方程的. 在后来的一篇论文[34]中他给出直角坐标形式(44). 完全可以肯定，他是先得到

(33) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1782, 113～196, pub. 1785＝*Œuvres*, 10, 339～419.

(34) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1787, 249～267, pub. 1789＝*Œuvres*, 11, 275～292.

直角坐标形式然后再从它推出球坐标形式的. 事实上，两种形式，已经由 Euler 和 Lagrange 给出了，但是 Laplace 没有提到他们. 他可能不知道他们的工作，虽然这是可疑的.

在 1782 年的文章中，Laplace 令

$$V(r,\theta,\phi)=\frac{U_0}{r}+\frac{U_1}{r^2}+\frac{U_2}{r^3}+\cdots, \tag{52}$$

这里 $U_n=U_n(\theta,\phi)$，他将它代入(51)，则单个的 U_n 满足[35]

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial U}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\phi^2}+n(n+1)U=0. \tag{53}$$

借助 Legendre 的 P_{2n}，他就能证明

$$U_n(\theta,\phi)=\iiint r'^{n+2}P_{2n}(\cos\theta\cos\theta' +\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))\sin\theta' d\theta' d\phi' dr'. \tag{54}$$

接着 Laplace 利用这个结果与(52)来计算与一球有小差异的球状体的势. 他把球状体的表面方程写成

$$r=a(1+\alpha y), \tag{55}$$

这里 α 很小，而 y 是在球状体上 θ' 和 ϕ' 的函数. Laplace 假定 $y(\theta,\phi)$ 能展成函数项级数

$$y=Y_0+Y_1+Y_2+\cdots, \tag{56}$$

其中 Y_n 是 θ, ϕ 的函数，满足微分方程(53). 这里他得到的结果首先是

$$Y_n=\frac{2n+1}{4\pi\alpha a^{n+1}}U_n. \tag{57}$$

于是，这些 Y_n 可用到(52)中. 展开式(56)还可改写成

(35) 如果我们忽略中项（ϕ 不出现），这样得到的常微分方程就是现在所谓的 Legendre 微分方程

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0.$$

$P_n(x)$ 满足这个方程. 另一方面，U_n（和[57]中的 Y_n）作为两个变量 $\mu=\cos\theta$ 和 ϕ 的函数满足(53). 这 U_n 和 Y_n，德国人称为球函数，而 Lord Kelvin 称为球调和或球面调和函数.

$$(58)\qquad y(\mu,\ \phi)=\frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\times\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}Y_n(\mu',\ \phi')P_n(\mu,\ \phi,\ \mu',\ \phi')d\mu'd\phi',$$

其中 $\mu'=\cos\theta'$. 这时，用 y 的值，他就有了一个关于(55)中的 r 的表达式，而利用这个结果和(54)中的 U_n，他就得了(52)中的 V.

Laplace 在这里并没有考虑把 θ, ϕ 的任一函数展开成 Y_n 的级数的一般问题. 他在这里所作的和后来的文章中，他深信这样的表示式是可能的并且是唯一的. 他只处理 μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\phi$ 和 $\sqrt{1-\mu^2}\sin\phi$ 的有理整函数，因而他对于一般结果的需要是有限制的. 他证明了基本的正交性质

$$(59)\qquad \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}U_n(\mu,\ \phi)U_m(\mu,\ \phi)=0,\quad m\neq n.$$

但是，在他的«天体力学»第二卷里，他证明 θ 和 ϕ 的任意函数能展开成 U_n(或 Y_n)的级数，并且证明(59)蕴涵着展开式的唯一性.

Laplace 还写了关于球状体的引力和地球形状的几篇别的论文(例如，1783 年，发表于 1786 年；1787 年，发表于 1789 年)；在这些文章中用了球函数展开式. 在最后的那篇文章中，Laplace 给出了直角坐标形式的位势方程，但他作了一个错误的结论，他假设这个方程当被吸引的质点位于物体内部时也成立. 这个错误由 Poisson 加以更正(第 28 章第 4 节).

十八世纪八十年代 Legendre 继续进行他的研究. 在写于 1790 年的第四篇论文[36]中，他对奇数 n 引进了 $P_n(x)$. (47)给出的 $P_n(x)$ 的表达式对一切 n 都是正确的，Legendre 证明了对任何正整数 m 和 n，成立

$$(60)\qquad \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0 & 当\ m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1} & 当\ m=n.\end{cases}$$

(36) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1789, 372～454, pub. 1793.

后来,他也引进了球函数.就是说,他令 Y_n 是 $(1-2zt+z^2)^{-1/2}$ 展开式中 z^n 的系数,这里 $t=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$.然后令 $\mu=\cos\theta$, $\mu'=\cos\theta'$ 和 $\psi=\phi-\phi'$,他就证得

$$Y_n(t)=P_n(\mu)P_n(\mu')+\frac{2}{n(n+1)}\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\frac{dP_n(\mu')}{d\mu'}$$

$$\times\sin\theta\sin\theta'\cos\psi+\frac{2}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\frac{d^2P_n(\mu)}{d\mu^2}$$

$$\times\frac{d^2P_n(\mu')}{d\mu'^2}\sin^2\theta\sin^2\theta'\cos 2\psi+\cdots,$$

更高的项包含 P_n 的更高阶导数.这个方程等价于

$$P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi'))$$

$$=\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\phi-\phi'),$$

其中 m 是上标而不是指数.$P_n^m(x)$ 满足

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n^m}{dx}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_n^m=0 \tag{61}$$

并且 $P_n^m(x)$ 与

$$(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$$

只差一个常数因子.这样引进的 $P_n^m(x)$ 现在称为连带的 Legendre 多项式.然后,Legendre 证明了

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}U_n(\mu',\phi')P_n(\mu,\phi,\mu',\phi')d\mu'\,d\phi'=\frac{4\pi}{2n+1}U_n(\mu,\phi) \tag{62}$$

和

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}\{P_n(\mu)\}^2d\mu\,d\phi=\frac{4\pi}{2n+1}. \tag{63}$$

这篇文章中用到了 $P_n(x)$ 满足 Legendre 微分方程的事实.

还有许多包含着 Legendre 多项式和球调和函数的别的特殊结果,是由 Legendre、Laplace 和其他人得到的.一个基本结果是

1816 年[37]得到的 Olinde Rodrigues (1794～1851) 公式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \tag{64}$$

Laplace 解球状体引力位势方程方面的工作是这个课题上浩瀚的工作的开始. 他和 Legendre 在关于 Legendre 多项式 $P_n(x)$, 连带的 Legendre 多项式 $P_n^m(x)$ 及球(球面)调和 $Y_n(\mu, \phi)$ 方面的工作同等重要, 因为更加任意得多的函数都能表示成 P_n, P_n^m 和 Y_n 的无穷级数. 这一系列函数类似于三角函数, 对后者 Daniel Bernoulli 曾断言它们能用来表示任意函数. 至于函数类的选择则要依赖于被解的微分方程以及初值和边界条件. 当然, 对这些函数以前曾经完成了很多工作, 过去又作过很多工作, 才使得它们在解偏微分方程中更为有用.

5. 一阶偏微分方程

直到 Lagrange 的时代, 在一阶偏微分方程方面还很少系统的研究. 二阶方程首先受到注意, 因为物理问题直接引导出它们. 只有很少几种特殊的一阶方程被解出来, 但是这些方程或者是容易被积分出来的, 或者是通过技巧被积分出来的. 只有一个例外, 就是形如

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \tag{65}$$

的今天通常称为全微分方程的这种方程, 这里 P, Q, R 是 x, y, z 的函数. 这类方程, 如果能积分的话, 就把 z 定义成 x 和 y 的函数. Clairaut 1739 年在他关于地球形状的研究[38]中遇到了这样的方程. 如果(65)左端的表达式是一个恰当微分, 就是说, 如果存在函数 $u(x, y, z)=C$ 使得

(37) *Corresp. sur l'Ecole Poly.*, 3, 1816, 361～385.

(38) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1739, 425～436.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz, \tag{66}$$

那么，Clairaut 指出

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}. \tag{67}$$

Clairaut 讲明怎样用一种现代教科书中仍在使用着的方法求解(65)．如果 P, Q, R 是流体运动的速度分量，则(65)就是一恰当微分方程，这个事实，使人们对方程(65)发生了兴趣．

如果(65)不是恰当微分方程，那么 Clairaut 也说明了有可能求得积分因子，即这样一个函数 $\mu(x, y, z)$，当用它去乘(65)后，新的左端便是一恰当微分．Clairaut[39] 和后来 d'Alembert(《论流体运动的平衡》*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, 1744) 都给出了 (65) 可积分的一个必要条件 (借助于积分因子)．这个条件(同时也是充分的)是

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{68}$$

一般的两个自变量的一阶偏微分方程形如

$$f(x, y, z, p, q)=0, \tag{69}$$

这里 $p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$．如果方程关于 p、q 是线性的，则称之为线性偏微分方程，否则，称为非线性的．最重要的理论是 Lagrange 贡献的．

为了了解 Lagrange 的工作，首先必须记住他的至今仍旧通用的术语．他把一阶非线性方程的解分类如下．任一包含两个任意常数的解 $V(x,y,z,a,b)=0$ 是完全解或完全积分．令 $b=\phi(a)$，这里 ϕ 是任意的，我们就得到一个单参数解族．当 $\phi(a)$ 任意时，该族的包络称为通积分．当一个确定的 $\phi(a)$ 被使用时，这个包络是通积分的一个特殊情况．完全积分中的所有解的包络称为奇解(奇积分)．不久我们将看到这些解在几何上是怎么回事．完全积

(39) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1740, 293～323.

分不是唯一的，因为能够有许多不相同的完全积分，它们之间通过简单的改变任意常数是不能相互得到的. 但是，从任一完全积分，通过特殊情况和奇解，能够得到由另一完全积分给出的所有的解.

在我们将要简短地讲到的 1772 年和 1779 年的两篇重要文章之间，Lagrange 在 1774 年写了一篇讨论一阶偏微分方程的完全解、通解和奇解之间的关系的论文. 从 $V(x, y, z, a, \phi(a))=0$ 及 $\partial V/\partial a=0$ (其中 $\phi(a)$ 任意) 中消去 a 就得到通积分[40]. (对于一个特殊的 $\phi(a)$, 我们得到一个特解.) 从 $V(x, y, z, a, b)=0$, $\partial V/\partial a=0$ 和 $\partial V/\partial b=0$ 中消去 a 和 b 就得到奇解.

Lagrange 首次给出非线性一阶方程的一般理论. 在 1772 年的文章[41]中，他考察了两个自变量 x, y 及一个应变量 z 的一般一阶方程. 这里他改进并推广了 Euler 早些时候做的工作. 他把方程(69)看作是这样的形式，其中 q 是 x, y, z 和 p 的函数，即

$$q-Q(x, y, z, p)=0, \tag{70}$$

并且试图确定 p 作为 x, y, z 的一个函数 P, 从而使得两个方程

$$q-Q(x, y, z, p)=0 \quad 和 \quad p-P(x, y, z)=0 \tag{71}$$

有单重无穷多个公共积分曲面，或者，象 Lagrange 从分析上阐明它那样，使得表达式

$$dz-pdx-qdy \tag{72}$$

乘以适当因子 $M(x, y, z)$ 就变成 $N(x, y, z)=0$ 的恰当微分 dN. 为此必须有

$$\frac{\partial N}{\partial z}=M, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=-Mp, \quad \frac{\partial N}{\partial y}=-Mq.$$

对于这些方程，可积条件(67)蕴涵

$$\frac{\partial M}{\partial x}=-\frac{\partial(Mp)}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{\partial(Mq)}{\partial z}, \quad \frac{\partial(Mp)}{\partial y}=\frac{\partial(Mq)}{\partial x}.$$

(40) 对任意的 ϕ, 实际上实现 a 的消去一般是不可能的. 通积分是一个相当于特解族的概念.

(41) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1772＝*Œuvres*, 3, 549～575.

如果把这三个方程中的前两个所给出的 $\partial M/\partial x$ 和 $\partial M/\partial y$ 的值代入最后一个，就得到

$$\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}-p\frac{\partial q}{\partial z}+q\frac{\partial p}{\partial z}=0. \tag{73}$$

这就是使(72)可积的条件(68)，而(68)，正如 Lagrange 所评注的，是一个早就知道的条件．在(73)中 q 能取为 x, y, z 和 p 的给定函数 Q，因而这方程显然变成

$$-Q_p\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}+(Q-pQ_p)\frac{\partial p}{\partial z}-Q_x-pQ_z=0. \tag{74}$$

现在，Lagrange 的计划便是寻找这个一阶方程的解 $p=P$，它关于 p 的导数是线性的，其解包含一个任意常数 α．得到它以后，他再积分两个方程

$$q-Q(x, y, z, p)=0,\quad p-P(x, y, z, \alpha)=0, \tag{75}$$

这表示 $\partial z/\partial x$ 和 $\partial z/\partial y$ 是 x, y, z 的函数．就求得了原方程(70)的一族 ∞^2 个积分曲面；也就是说，他求得了完全解．那么，至此，Lagrange 是用解线性方程(74)的问题来代替解非线性方程(70)的问题．

1779 年 Lagrange 给出了他的解线性一阶偏微分方程的方法[42]．他考虑至今仍称为 Lagrange 方程的线性方程

$$Pp+Qq=R, \tag{76}$$

其中 P, Q, R 是 x, y, z 的函数；这个方程称为非齐次的，因为有 R 这项出现．这个方程与三个自变量的齐次方程

$$P\frac{\partial f}{\partial x}+Q\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial f}{\partial z}=0 \tag{77}$$

紧密相连．Lagrange 容易地证明了：如果 $u(x, y, z)=c$ 是(76)的一个解，那么 $f=u(x, y, z)$ 就是(77)的一个解，反之亦然．因此解(76)的问题等价于解(77)．而方程(77)又转而联系着常微分方程组

(42) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1779=*Œuvres*, 4, 585～634.

$$(78)\qquad \frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}\ \text{或}\ \frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}\ \text{和}\ \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}.$$

事实上，如果$f=u(x, y, z)$和$f=v(x, y, z)$是(77)的两个独立的解，那么$u=c_1$和$v=c_2$就是(78)的一个解，反之亦然。因此，如果我们能求得(78)的解$u=c_1$和$v=c_2$，$f=u$和$f=v$就将是(77)的解，并且$u=c$和$v=c$将是(76)的解。此外，容易证明：当ϕ是u, v的任意函数时，$f=\phi(u, v)$也满足(77)。于是$\phi(u, v)=c$，或因ϕ是任意的，$\phi(u, v)=0$就是(76)的通解。Lagrange 在1779年给出了上述纲要，并在1785年[43]给出了证明。或许值得顺便指出，Euler 也晓得(77)的解能被化成(78)的解。

如果把线性方程方面的这一工作与1772年在非线性方程方面的工作联系起来，就会看到 Lagrange 已经成功地把一个关于x, y, z的任意一阶方程化成为一组联立常微分方程。他没有明显地陈述这个结果，但这是可以从上面的工作直接推出来的。奇怪的是，在1785年他解一个特殊的一阶偏微分方程时却说它不可能用这个方法；看来他忘掉了他较早(1772年)的工作！

后来，据推测 Paul Charpit (死于1784年)在1784年把非线性方程和线性方程的方法结合起来，将任一$f(x, y, z, p, q)=0$化归为一个常微分方程组。在1798年 Lacroix 说：Charpit 在1784年提出了一篇文章(未出版)，其中他把一阶偏微分方程化归到常微分方程组。Jacobi 发现了 Lacroix 的惊人的说法，表示希望发表 Charpit 的工作。但是，这件事一直没有办到，以至我们不知道 Lacroix 的说法是不是正确的。事实上，是 Lagrange 作了完整的工作，而 Charpit 可能并未增加什么内容。现代教科书中给出的方法——称为 Lagrange, Lagrange-Charpit, 或 Charpit 方法，是 Lagrange 在1772和1779年文章中提出的思想的融和。这个方法说明为解一般的一阶偏微分方程$f(x, y, z, p, q)=0$，就必

(43) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1785 = *Œuvres*, 5, 543～562.

须解常微分方程组($f=0$ 的特征方程)

$$(79)\qquad \begin{gathered}\frac{dx}{dt}=f_p,\quad \frac{dy}{dt}=f_q,\quad \frac{dz}{dt}=pf_p+qf_q,\\ \frac{dp}{dt}=-f_x-f_zp,\quad \frac{dq}{dt}=-f_y-f_zq.\end{gathered}$$

如果求得(79)的任何一个积分,比如说 $u(x, y, z, p, q)=A$, 就可得到解. 把这些方程和 $f=0$ 联立,解出 p、q 并代入 $dz=pdx+qdy$ (见[72]),最后,用对(65)用过的方法就可求积分.

Lagrange 的方法常常称为 Cauchy 的特征方法, 因为把 Lagrange 和 Charpit 对两个自变量的方程过渡到(79)的方法推广到 n 个变量时出现了困难,而这一困难是由 Cauchy 在 1819 年[44]克服的.

6. Monge 和特征理论

Lagrange 纯粹是从分析上来进行工作的. Gaspard Monge (1746～1818)引进了几何语言. 对偏微分方程,他的工作虽不如 Euler, Lagrange 和 Legendre 那么重大, 但是他开创了用几何来解释分析研究的运动, 并且因此引进了许多富有成果的想法. 他说明:如同包含曲线的问题引导出常微分方程一样,包含曲面的问题就引导出偏微分方程. 更一般地, 对于 Monge 来说, 几何和分析是同一个课题,而对该世纪别的数学家来说,这两个分支是分离的, 仅有一些接触点. Monge 在 1770 年开始他的研究, 但直到很久以后也没有发表他的成果.

在非线性一阶方程学科中首要的是: Monge 不仅引进几何解释, 而且还强调一个新概念: 特征曲线[45]. 他关于特征的思想以

(44) *Bull. de la Société Philomathique*, 1819, 10～21; 也可见 *Exercices d'analyse et de phys. math.*, 2, 238～272=*Œuvres*, (2), 12, 272～309.

(45) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1784, 85～117, 118～192, pub. 1787.

及积分作为包络的思想没有被他的同时代人所理解，还被称为形而上学的原理，但是，在后来的研究中特征理论却变成了一种非常重要的主题. 在他的讲义和随后的著名的出版物«关于把分析应用于几何的活页论文» (*Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, 1795) 中，Monge 把他的思想发展得更加完整. 这思想最好用他自己的例子来说明.

考虑半径是常数 R，中心在 XY 平面上无论何处的双参数球面族. 这个族的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2. \tag{80}$$

这个方程是非线性一阶偏微分方程

$$z^2(p^2+q^2+1)=R^2 \tag{81}$$

的完全积分，因为 (80) 包含两个任意常数 a 和 b，并且显然满足 (81). 令 $b=\phi(a)$ 来引进任一子球面族，这是中心在 XY 平面上的曲线 $y=\phi(x)$ 上的球面族. 这个单参数球面族的包络 (管状曲面) 也是 (81) 的一个解. 这个特解可从

$$(x-a)^2+(y-\phi(a))^2+z^2=R^2 \tag{82}$$

及 (82) 对 a 的偏导数，即

$$(x-a)+(y-\phi(a))\phi'(a)=0 \tag{83}$$

两式中消去 a 得到. 对每一特别选定的 a，方程 (82) 和 (83) 表示两张特定的曲面，因此，联立考察两曲面就表示一条曲线，称为特征曲线. 这条曲线也是该子族中两"相邻"曲面的交线. 特征曲线的集合填满包络；也就是，包络与子族中每一成员沿一条特征线相切触. 通积分是特征曲线集合生成的每一曲面 (单参数族的包络) 的总体. (80) 的全体解的包络，也就是，奇解 $z=\pm R$，可从 (80) 与 (80) 分别对 a, b 的偏导数中消去 a 和 b 而得到.

特征曲线也以另一种方式表现出来. 考察两个球面子族，它们各自的包络沿任一球面相切. 我们可称这样的包络是相邻包络. 两相邻包络的交线是球面上的特征曲线，它与通过考虑各子

族的相邻成员得到的特征曲线是相同的．任一球面可属于包络完全不同的无穷多个相异的子球面族，所以在同一球面上将有不同的特征曲线．所有这些特征曲线都是垂直平面中的大圆．

Monge 建立了特征曲线的微分方程的分析形式，它相当于方程(79)确定(69)的特征曲线这一事实．(Monge 利用全微分方程表示特征曲线的方程．)

Monge 还引进了(1784)特征锥的概念．在空间任一点(x, y, z)(图22.4)可考虑一平面，它的法线有方向数$p, q, -1$．对一固定的(x, y, z)，满足

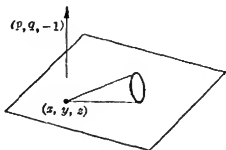


图 22.4

(84)　$F(x, y, z, p, q)=0$

的p和q的集合确定一全部通过(x, y, z)的单参数平面族．这个平面集是一个顶点在(x, y, z)的锥的包络．这就是(x, y, z)的特征锥或 Monge 锥．如果我们现在来考察方程为$z=g(x, y)$的曲面S，则它在每一(x, y, z)有一个切平面．这样一张曲面是$F=0$的积分曲面的必要充分条件是：在每点(x, y, z)上，F的切平面是(x, y, z)处 Monge 锥的切平面．积分曲面S上的曲线C称为特征曲线，如果C上每点的切线是 Monge 锥在该点的母线．这些特征曲线与 Monge 把(80)看成完全积分推得的是同样的，并且也是联立方程(79)的解．Monge 还在1802年的收编在他的«分析在几何中的应用»(*Application de l'analyse à la géométrie*[46], 1807)中的一篇文章中指出：每一积分曲面都是特征曲线的轨迹，并且仅有一条特征曲线通过这一积分曲面的每一点．

特征曲线的重要性在于：如果取一空间曲线$x(t), y(t), z(t)$(对t值的某一区间)不是特征曲线，那么恰好存在$F=0$的一个

(46) 这是他的«*Feuilles d'analyse*»第三版的书名。

积分曲面通过该曲线；即，恰好存在一个 $z=g(x, y)$ 使得 $z(t)=g(x(t), y(t))$（对 t 值的范围）．另一方面，如同 Monge 在 1806 年讲义中指出的：对每一特征曲线都能有无穷多个积分曲面通过它．此外，通过该曲线的无穷多个积分曲面都沿这条曲线彼此相切．

7. Monge 和非线性二阶方程

除了我们已经回顾过的二阶线性方程外，十八世纪的数学家们还有需要考虑更一般的两个自变量的线性二阶方程，甚至非线性方程．例如，他们研究了线性方程

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz+G=0,$$

这里 $A, B, \cdots, G$ 是 x 和 y 的函数．这个方程通常写成

(85) $$Ar+Bs+Ct+Dp+Eq+Fz+G=0,$$

这里字母 r, s, t, p 和 q 有显然的意义． Laplace 在 1773[47] 年证明假如 $B^2-4AC\neq 0$，方程(85)就能经过变量替换化成如下形式：

(86) $$s+ap+bq+cz+g=0,$$

这里 a, b, c 和 g 是 x 和 y 的函数．然后他用无穷级数来解这个方程．

Monge 在他的《关于把分析应用于几何的活页论文》中，考察了非线性方程

(87) $$Rr+Ss+Tt=V,$$

其中 R, S, T 和 V 是 x, y, z, p 和 q 的函数，因而，方程关于二阶导数 r, s 和 t 是线性的．在 Lagrange 关于极小曲面（即由给定的空间曲线界住的面积最小的曲面）的工作中出现了这类方程，在那里具体的微分方程是 $(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$（也可见第

(47) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1773, pub. 1777 = *Œuvres*, 9, 5～68.

24章第4节). 虽然 Monge 对方程(87)曾经作了一些研究, 但在现在的文章(1795)中, 他才能够用我们将要扼要介绍的方法漂亮地解出它.

利用下面这些直接的事实:

(88) $$dz = p\,dx + q\,dy,$$

(89) $$dp = r\,dx + s\,dy,$$

(90) $$dq = s\,dx + t\,dy,$$

并从(87)、(89)及(90)中消去 r 和 t, 他得到方程

(91) $$s(Rdy^2 - Sdxdy + Tdx^2) - (Rdydp + Tdxdq - Vdxdy) = 0.$$

然后, 他的论证是: 每当可以联立地求解

(92) $$R\,dy^2 - S\,dx\,dy + T\,dx^2 = 0$$

和

(93) $$R\,dy\,dp + T\,dx\,dq - V\,dx\,dy = 0$$

时, 则(91)将被满足, 从而(87)也将被满足.

方程(92)等价于两个一阶方程

(94) $dy - W_1(x, y, z, p, q)dx = 0$ 和 $dy - W_2(x, y, z, p, q) = 0.$

方程(88), (93)与(94)的任一个一起, 组成五个变量 x, y, z, p 和 q 的三个全微分方程的方程组. 这三个方程能解时, 就可求得两个解

$$u_1(x, y, z, p, q) = C_1 \text{ 和 } u_2(x, y, z, p, q) = C_2,$$

于是

(95) $$u_1 = \phi(u_2)$$

是一个一阶偏微分方程, 其中 ϕ 是任意的. 方程(95)称为中间积分. 它的通解是(87)的解. 如果(94)的另一方程能与(88)和(93)一起用, 我们就得到另一函数

(96) $$u_3 = \phi(u_4).$$

在这种情形(95)和(96)能联立地解出 p 和 q, 把这些值代入(88), 那么, 这个全微分方程就能解出来. 这至少是一个一般的格式, 虽

然还有很多细节我们未及详述. Monge关于极小曲面方程的积分法是他为之自豪的成就之一.

对于方程(87), Monge也引进了特征理论. 特征的全微分方程是(92), 即

$$R\,dy^2-S\,dx\,dy+T\,dx^2=0.$$

早在他的1784年的工作[48]中就出现了这个方程, 它在积分曲面的每一点上定义该点的两个特征方向. 积分曲面的每一点都有两条特征曲线通过, 沿其中每一条都有两个相邻的积分曲面彼此相切.

8. 一阶偏微分方程组

十八世纪在流体动力学和水力学研究中首次提出了偏微分方程组. 诸如: 设计船身以减少它在水中运动的阻力, 以及潮汐、河水的流动, 从喷口射出的水流, 水对船舷的压力的计算等实际问题推动了对不可压缩流体, 例如水的研究工作. 对可压缩流体, 特别是空气的研究工作, 是为了要分析空气在船帆上的作用, 设计风车叶片和了解声音的传播. 我们早些时候研究过的声音传播方面的工作, 在历史上是把水力学上的研究特殊化, 使之适用于小振幅波动的一个应用.

Euler在1752年一篇题为«流体运动原理»[49]的文章中处理了不可压缩流体, 之后, 他在1755年一篇题为«流体运动的一般原理»[50]的文章中, 推广了前一个工作. 这里他给出了至今仍然著名的关于理想(无粘性)可压缩和不可压缩流体的流体流的方程.

(48) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1784, 118~192, pub. 1787.

(49) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1756/1757, 271~311, pub. 1761 = *Opera*, (2), 12, 133~168.

(50) *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 11, 1755, 274~315, pub. 1757 = *Opera*, (2), 12, 54~91.

流体被认为是连续的，其质点是数学上的点．他考察了受到压力为 p，密度为 ρ 以及单位质量上分量为 P, Q, R 的外力作用的流体小体积上的作用力．

Euler 创立的流体动力学的两种方法之一，文献中称之为空间描写，其中流体速度的分量 u, v 和 w 在流体中每一点由

$$u=u(x, y, z, t),\quad v=v(x, y, z, t),\quad w=w(x, y, z, t) \tag{97}$$

给出．这里

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

在时间 dt，质点 (x, y, z) 在 x 方向走过距离 udt，在 y 方向走过距离 vdt，在 z 方向走过 wdt．于是在 du 的表示式中的实际变化量 dx, dy 及 dz 就由这些量给出，因而

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}udt+\frac{\partial u}{\partial y}vdt+\frac{\partial u}{\partial z}wdt+\frac{\partial u}{\partial t}dt$$

或者

$$\frac{du}{dt}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{98}$$

对 dv/dt 和 dw/dt 也有相应的表达式．这些量给出现在称为 (x, y, z) 处的速度变化的对流率，或对流加速度．计算 (x, y, z) 处质点上的作用力，并应用牛顿第二定律，Euler 得到微分方程组

$$\begin{aligned} P-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{du}{dt},\\ Q-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{dv}{dt},\\ R-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{dw}{dt}. \end{aligned} \tag{99}$$

Euler 还推广了 d'Alembert 的连续性微分方程(45)，并且得到关于可压缩流的方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \tag{100}$$

这里有四个方程和五个未知函数，但是压力 p 作为密度的函数——状态方程——必须指定.

在 1755 年的文章中 Euler 说："如果我们不能洞察关于流体运动的完全的知识的话，那么归结其原因，不在于力学，或不在于已知的运动原理不够充分；这里是分析本身抛弃了我们，因为流体运动的全部理论正好被化归成分析公式的解."不幸的是，要很好地处理这些方程，分析仍嫌无能为力. 于是，他动手讨论某些特殊的解法. 在这个题目上他还写了一些别的文章，处理船受到的阻力和船的推力. Euler 的方程并不是水力学的最终的方程. Euler 忽略了的粘性是七十年后由 Navier 和 Stokes 引进的（第 28 章第 7 节）.

Lagrange 也从事流体运动的研究. 在他的《分析力学》第一版中，包括一些这类的研究，他给出了 Euler 的基本方程并推广了它们. 这里，他把荣誉归于 d'Alembert，而没有归于 Euler. 他也说流体运动方程用分析来处理是太困难了，能严密计算的只是无穷小运动的情况.

在偏微分方程组领域中，在十八世纪里水力学方程是这门学科数学研究的主要启发. 实际上，十八世纪在方程组的解方面成就甚少.

9. 这一门数学学科的产生

直到 1765 年偏微分方程只在解决物理问题中出现. 贡献给偏微分方程的纯数学研究的第一篇论文是 Euler 的:《方程

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+\frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

的积分法研究》.[51] 稍后 Euler 在他的《积分学原理》[52] 第三卷中

(51) *Misc. Taur.*, 3_2, 1762/1765, 60～91, pub. 1766=*Opera*, (1), 23, 47～73.
(52) 1770=*Opera*, (1), 13.

发表了这个题目的一篇论文.

在 d'Alembert 1747 年弦振动的工作以前，偏微分方程是作为条件方程为人所知的，并且只是求特解. 在这个工作和 d'Alembert 关于风的一般成因的书(1746)以后，数学家才认识到特解和通解之间的区别. 但是，一旦意识到了这个差别，他们似乎相信通解更为重要. Laplace 在 1799 年«天体力学»第一卷中还抱怨说球坐标的位势方程不能用一般形式求积分. 在这个世纪里没有意识到下述事实：Euler 和 d'Alembert 对振动弦得到的那种通解并不象满足初值和边界条件的特解那么有用.

数学家们确实认识到了偏微分方程并没有包含什么新的运算技巧，它与常微分方程不同之处只在于，在解中可以出现任意函数. 他们期望把偏微分方程化为常微分方程去确定这些任意函数. Laplace(1773) 和 Lagrange(1784) 明确地说，他们认为一个偏微分方程被化成常微分方程问题时，这个偏微分方程就已被积分出来了. 另一种方法，如象 Daniel Bernoulli 对波动方程及 Laplace 对位势方程那样，用的是寻求特殊函数的级数展开式.

十八世纪在偏微分方程研究中的主要成就是揭示了它们对于弹性力学、水力学和万有引力问题的重要性. 除了 Lagrange 在一阶方程方面的工作外，普遍的方法没有发展起来，人们也没有意识到特殊函数展开法的潜力. 人们的努力方向是求解物理问题中提出的特殊方程. 偏微分方程解的理论还有待形成，这门学科整个说来还处在它的幼年时代.

参考书目

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik," *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 10, 1908, 1~1804.

Burkhardt, H., and W. Franz Meyer: "Potentialtheorie," *Encyk. der Math. Wiss.*,

B. G. Teubner, 1899～1916, 2, A7b, 464～503.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924; Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 3, 858～878, Vol. 4, 873～1047.

Euler, Leonard: *Opera Omnia*, Orell Füssli, (1), Vols. 13 (1914) and 23 (1938); (2), Vols. 10, 11, 12, and 13(1947～1955).

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1868～1870, relevant papers in Vols. 1, 3, 4, 5.

Laplace, Pierre-Simon: *Œuvres complètes* Gauthier-Villars, 1893～1894, relevant papers in Vols. 9 and 10.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques* (1802), Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 342～352.

Langer, Rudolph E.: "Fourier Series: The Genesis and Evolution of a Theory," *Amer. Math. Monthly*, 54, No. 7, Part 2, 1947.

Taton, René: *L'Œuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, 1951.

Todhunter, Isaac: *A History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth* (1873), Dover (reprint), 1962.

Truesdell, Clifford E.: *Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia Vol. X et XI Seriei Secundae*, in Euler, *Opera Omnia*, (2), 11, Part 2, Orell Füssli, 1960.

Truesdell, Clifford E.: *Editor's Introduction* in Euler, *Opera Omnia*, (2), Vol. 12, Orell Füssli, 1954.

Truesdell, Clifford E.: *Editor's Introduction* in Euler, *Opera Omnia*, (2), Vol. 13, Orell Füssli, 1956.

23

十八世纪的解析几何和微分几何

> 几何看来有时候要领先于分析，但事实上，几何的先行于分析，只不过象一个仆人走在主人的前面一样，是为主人开路的。
>
> James Joseph Sylvetster

1. 引 言

物理问题的探索不可避免地要导致去寻求关于曲线和曲面的更多的知识，因为运动物体经过的路径都是曲线，而物体本身则是由曲面界住的三维体．早已热衷于坐标几何的方法和微积分的力量的数学家们曾经用这两个主要工具研究过几何问题．在已经建立起来的坐标几何领域以及由于把微积分应用到几何问题中去而创立的新领域——微分几何方面，在本世纪得到了令人难忘的结果．

2. 基本解析几何

十八世纪广泛地探讨了二维解析几何．初等平面解析几何的改善是容易总结的．Newton 和 James Bernoulli 对于特殊的曲线从本质上说已经引进并使用了所谓的极坐标系(第15章第 5 节)，而 Jacob Hermann 则在 1729 年不仅正式宣布了极坐标的普遍可用，而且自由地应用极坐标去研究曲线．他还给出了从直角坐标到极坐标的变换公式．确切地讲，Hermann 把 p, $\cos\theta$, $\sin\theta$ 当作变

量来使用，而且用 z, n 和 m 来表示 p, $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$. Euler 扩充了极坐标的使用范围而且明确地使用三角函数的记号；Euler 那个时候的极坐标系实际上就是现代的极坐标系.

虽然一些十七世纪的数学家——例如 Jan de Witt (1625～1672)在他的《曲线初步》(*Elementa Curvarum Linearum*, 1659)中——确曾把 x 和 y 的某些二次方程化为标准型，James Stirling 在他的《牛顿的三次曲线》(*Lineae Tertii Ordinis Neutonianae*, 1717)中则把 x 和 y 的一般的二次方程化为几种标准型.

在 Euler 的《引论》(*Introductio*, 1748)中，他引进了曲线的参数表示，那里 x 和 y 是用第三个变量表示出来的. 在这本著名的教科书中 Euler 系统地讨论了平面坐标几何.

就我们所知道的，在 Fermat, Descartes 和 La Hire 的著作中能找到关于三维坐标几何细微的迹象. 但真正的发展是十八世纪的工作. 尽管某些早期的工作，例如 Pitot 的和 Clairaut 的工作，是和微分几何的发展有联系的，但我们在这里将只讨论真正的坐标几何.

第一件工作是改善 La Hire 关于三维坐标系的建议. John Bernoulli 在 1715 年给 Leibniz 的一封信中引进了我们现在通用的三个坐标平面. 通过 Antoine Parent (1666～1716), John Bernoulli, Clairaut 和 Jacob Hermann 的贡献(为了节省篇幅，这里不作详细介绍)，弄清了曲面能用三个坐标变量的一个方程表示出来这个观念. Clairaut 在他的《关于双重曲率曲线的研究》(*Recherche sur les courbes à double courbure*, 1731 年) 一书中不仅给出了一些曲面的方程，而且弄清楚了描述一条空间曲线需要两个曲面方程. 他还看出过一条曲线的两个曲面方程的某种组合，例如，两个方程相加，给出过这条曲线的另一曲面的方程. 利用这个事实，他说明怎样能够得到这些空间曲线的投影的方程，也就是求垂直于投影平面的柱面的方程.

二次曲面，例如球面，柱面，抛物面，双叶双曲面和椭球面，当然在 1700 年前就已经从几何上知道了；事实上，这些曲面中的某些已出现在 Archimedes 的著作中. Clairaut 在他 1731 年的书中给出了这些曲面中某几个的方程. 他还说明了 x、y 和 z 的齐次方程(各项的次数都相同)表示顶点在原点的一个锥面. 对于这个结果，Jacob Hermann 在 1732 年的一篇论文中[(1)]加上一条，即方程 $x^2+y^2=f(z)$ 是绕 z 轴的一个旋转曲面. Clairaut 和 Hermann 首先都关心地球的形状，在他们那个时代，人们都相信地球是某种形状的椭球.

尽管 Euler 对曲面方程已经做过一些早期工作，但是系统地致力于三维坐标几何，还是在他的«引论»(1748 年)第二卷第 5 章的附录[(2)]中. 他介绍了许多早已做过的工作，然后研究了一般的三个变量的二次方程

$$(1)\qquad ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz=l.$$

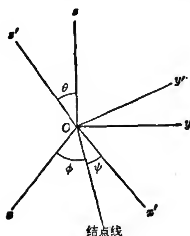


图 23.1

他企图通过坐标变换把这个方程化成这样的形式，使 (1) 所表示的二次曲面的主轴正好是坐标轴. 他引进了从 xyz-坐标系到 $x'y'z'$-坐标系的变换，其方程是用角 ϕ, ψ 和 θ 表示出来的(图 23.1). 角 ϕ 是 xy 平面上从 x 轴到结点线(即 $x'y'$ 平面和 xy 平面的交线) 间的夹角，角 ψ 是 $x'y'$ 平面上 x' 轴和结点线间的夹角，角 θ 就是图中所示 z 和 z' 的夹角. 因此包括平移在内的变换方程是

$$\begin{aligned}x=x_0&+x'(\cos\psi\cos\phi-\cos\theta\sin\psi\sin\phi)\\&-y'(\cos\psi\sin\phi+\cos\theta\sin\psi\sin\phi)+z'\sin\theta\sin\phi,\end{aligned}$$

(1) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 36～67, pub. 1738.

(2) *Opera*, (1), 9.

(2) $y=y_0+x'(\sin\psi\cos\phi+\cos\theta\cos\psi\sin\phi)$

$\quad -y'(\sin\psi\sin\phi-\cos\theta\cos\psi\sin\phi)-z'\sin\theta\sin\phi,$

$z=z_0+x'\sin\theta\sin\phi+y'\sin\theta\cos\phi+z'\cos\theta.$

Euler 就用这个变换把(1)化成标准形，而且得到了六种曲面：锥面，柱面，椭球面，单叶和双叶双曲面，双曲抛物面（这是他发现的）以及抛物柱面．和 Descartes 一样，Euler 主张按方程的次数来进行分类是正确的原则；Euler 的理由是，次数是线性变换下的不变量．

在对坐标轴变换问题继续进行工作之后，Euler 写了另一篇论文[3]，文中研究了把 $x^2+y^2+z^2$ 变到 $x'^2+y'^2+z'^2$ 的变换．在这篇文章中 Euler——稍后一点 Lagrange 在一篇关于球体引力的论文中[4]——给出了轴的旋转的对称形式的变换，即齐次线性正交变换

$$x=\lambda x'+\mu y'+\nu z',$$
$$y=\lambda' x'+\mu' y'+\nu' z',$$
$$z=\lambda'' x'+\mu'' y'+\nu'' z',$$

其中

$$\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2=1,\quad \lambda\mu+\lambda'\mu'+\lambda''\mu''=0,$$
$$\mu^2+\mu'^2+\mu''^2=1,\quad \lambda\nu+\lambda'\nu'+\lambda''\nu''=0,$$
$$\nu^2+\nu'^2+\nu''^2=1,\quad \mu\nu+\mu'\nu'+\mu''\nu''=0.$$

这些带撇和不带撇的 λ, μ, ν，用现代的术语来说，当然就是方向余弦．

Gaspard Monge 的写作包含大量的三维解析几何的内容．他在 1802 年和他的学生 Jean-Nicolas-Pierre Hachette (1769～1834 年) 一起写的一篇论文"代数在几何中的应用" (Application de

(3) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 15, 1770, 75～106, pub. 1771=*Opera*, (1), 6, 287～315.

(4) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773, 85～120=*Œuvres*, 3, 619～658.

l'algèbre à la géométrie) 中可以找到他对解析几何本身的突出贡献[5]. 作者们证明二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线，还证明了平行截面截得的是相似的二次曲线而且其放法也是相似的. 这些结果可与 Archimedes 的几何定理相比. 作者还证明了单叶双曲面和双曲抛物面是直纹曲面，即它们都能用一根直线按两种不同的方式运动而得到，或者说，它们是由两组直线族构成的. 关于单叶双曲面的结果，Christopher Wren 大约在 1669 年就知道了. 他说单叶双曲面的图形能够通过一条直线绕另一条和它不在同一平面上的直线旋转而得到. 由于 Euler, Lagrange 和 Monge 的工作，解析几何变成了一个独立的而且充满活力的数学分支.

3. 高次平面曲线

至此所述解析几何还是专门讲述一次和二次曲线、曲面的. 当然研究高次方程表示的曲线是自然的. 事实上 Descartes 早就讨论过一些高次方程及其所代表的曲线. 次数高于2的曲线的研究变成众所周知的高次平面曲线理论，尽管它是坐标几何的组成部分. 十八世纪所研究的曲线都是代数曲线；即它们的方程由 $f(x, y)=0$ 给出，其中 f 是 x 和 y 的多项式. 曲线的次数或阶数就是项的最高次数.

Newton 第一个对高次平面曲线进行了广泛的研究. Descartes 按照曲线方程的次数来对曲线进行分类的计划深深地打动了 Newton；于是 Newton 用适合于各该次曲线的方法系统地研究了各次曲线，他从研究三次曲线着手. 这个工作出现在他的《三次曲线例举》(*Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*) 中，这是作为他的 *Opticks* (光学) 英文版的附录在 1704 年出版的，但实际上大约

(5) *Jour. de l'Ecole Poly.*, 11 cahier, 1802, 143～169.

在1676年就做出来了．虽然在La Hire和Wallis的著作中使用了负x值和负y值，但Newton不仅用了两个坐标轴和负x负y值，而且还在所有四个象限中作图．

Newton证明了怎样能够把一般的三次方程

$$(3)\quad ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+jy+k=0$$

所代表的一切曲线通过坐标轴的变换化为下列四种形式之一：

$$\text{(a)}\quad xy^2+ey=ax^3+bx^2+cx+d,$$

$$\text{(b)}\quad xy=ax^3+bx^2+cx+d,$$

$$\text{(c)}\quad y^2=ax^3+bx^2+cx+d,$$

$$\text{(d)}\quad y=ax^3+bx^2+cx+d.$$

Newton把第三类曲线叫做发散抛物线(diverging parabolas)，它包括图23.2所示的五种曲线．这五种曲线是根据等式右边三次式的根的性质来区分的：全部是相异实根；两个根是复根；都是实根但有两个相等而且重根大于或小于单根；三个根都相等．Newton断言，先从一点出发对这五种曲线之一作射影，然后取射影的交线就能分别得到每一个三次曲线．

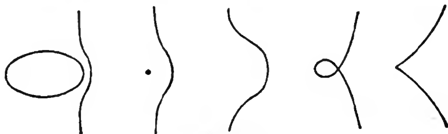


图 23.2

Newton对他在«例举»中的许多断言都没有给出证明．James Stirling在他的«三次曲线»中证明了或用别的方法重新证明了Newton的大多数断言，但是没有证明射影定理，射影定理是Clairaut[6]和François Nicole (1683～1758)[7]证明的．其实

(6) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1731, 490～493, pub. 1733.

(7) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1731, 494～510, pub. 1733.

Newton 识别了七十二种三次曲线，Stirling 加上了四种，修道院院长 Jean-Paul de Gua de Malves，在他 1740 年题为«利用 Descartes 的分析而不借助于微积分去进行发现……»(*Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différential*…)的小书里又加上了两种.

Newton 关于三次曲线的工作激发了关于高次平面曲线的许多其他研究工作. 按照这个或那个原则对三次和四次曲线进行分类的课题继续使十八和十九世纪的数学家们感兴趣. 随着分类方法的不同所找到的分类数目也不同.

从 Newton 的五种三次曲线的图形显然可见，高次方程所代表的曲线呈现着许多在一次和二次曲线中没有发现过的特性. 称为奇点的初等特性是拐点和多重点. 在继续讲下去以前，我们先来看一下这些奇点是什么样子的.

拐点在微积分里是熟悉的. 在曲线上一点处，若有两条或多条可以重合的切线，这样的点就叫做多重点. 在这样的点上曲线有两个或多个分支相交. 如果有两条分支曲线交于多重点，这种点就叫做二重点. 如果三条分支曲线交于多重点，则这种点叫做三重点，如此等等.

如果我们把一条代数曲线的方程取作

$$f(x, y)=0,$$

f 为 x, y 的一个多项式，我们总可以通过一个平移把常数项消去. 如果消去了常数项，又如果 f 中有一次项，记作 a_1x+b_1y，那么 $a_1x+b_1y=0$ 给出了曲线在原点处的切线方程. 这时原点不是多重点. 如果曲线没有一次项，又如果 $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2$ 是二次项，那么就会出现几种情形. 方程 $a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=0$ 可以代表两条不同的直线. 这两条直线与曲线在原点相切(这是可以证明的)，而因为有两条不同的切线，所以原点就是一个二重点；这个点叫做结点(node). 例如双纽线(图 23.3)的方程是

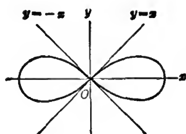


图 23.3 双纽线

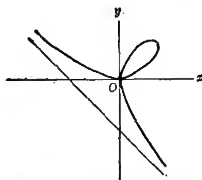


图 23.4 Descartes 叶形线

(4) $$a^2(y^2-x^2)+(y^2+x^2)^2=0,$$

而由二次项得到 $y^2-x^2=0$, 于是 $y=x$ 和 $y=-x$ 是切线的方程. 类似地, Descartes 叶形线的方程是

(5) $$x^3+y^3=3axy,$$

切于原点的切线由 $x=0$ 和 $y=0$ 给出,原点是一个结点.

当两条切线重合时,这一条直线看作是二重切线,而曲线的两个分支就在相切的点上互相接触,这种点叫尖点(cusp). (有时把尖点包括在二重点中.)例如半立方抛物线(图 23.5)

(6) $$ay^2=x^3$$

在原点有一个尖点,而两条重合的切线的方程是 $y^2=0$. 对于曲线 $(y-x^2)^2=x^5$(图 23.6), 原点是一个尖点. 这里曲线的两个分支都位于二重切线 $y=0$ 的同一侧. De Gua 在他的《利用 Decartes 的分析》中曾试图证明不会出现这种类型的尖点, 但是 Euler[(8)] 给

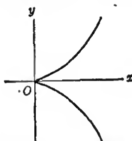


图 23.5 半立方抛物线

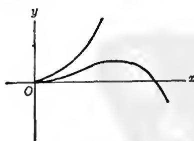


图 23.6

(8) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 5, 1749, 203~221, pub. 1751=*Opera*, (1), 27, 236~252.

出了有这种尖点的许多例子. 尖点也叫做平稳点或逆行点, 因为一个沿着曲线移动的点, 在尖点处继续其运动之前一定要停顿一下.

当两条切线是虚的时候, 二重点叫做共轭点. 共轭点的坐标满足曲线的方程, 但是这个点和曲线的其余部分隔离开来. 例如曲线 $y^2=x^2(2x-1)$ (图 23.7) 在原点有一个共轭点. 这里二重切线的方程是 $y^2=-x^2$, 而切线都是虚线.

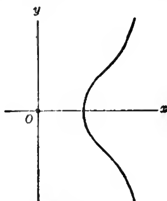


图 23.7

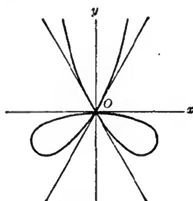


图 23.8

曲线 $ay^3-3ax^2y=x^4$ (图 23.8) 在原点有一个三重点. 这三条切线的方程是

$$ay^3-3ax^2y=0,$$

或 $y=0$ 和 $y=\pm x\sqrt{3}$.

曲线 $ay^4-ax^2y^2=x^5$ (图 23.9) 在原点有一个四重点. 在这里原点是结点和尖点的结合. 切线是 $y=0$, $y=0$, $y=\pm x$.

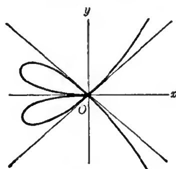


图 23.9

三次 (阶) 曲线可以有一个二重点 (它可以是尖点), 但没有别的多重点. 当然存在没有二重点的三次曲线.

回到纯粹历史来看, Leibniz 及其后继者研究了曲线上许多这种样子特别的或奇异的点, 至于出现这种点的解析条件——诸如在拐点处

$\dot{y}=0$，在二重点处 $\dot{y}$ 不确定——甚至微积分的奠基者们都已经知道.

Clairaut 在上面引用过的 1731 年的书中假设了一条三次曲线不能有多于三个的实拐点，但至少必有一个实拐点. De Gua 在《利用》中证明了，如果一条三次曲线有三个实拐点，则通过两个拐点的连线一定过第三个拐点. 人们常常把这个定理归功于 Maclaurin. De Gua 也研究了二重点，而且给出了二重点的条件，即如果 $f(x, y)=0$ 是曲线的方程，则在二重点处 f_x 和 f_y 一定等于 0. k 重点由所有直到 $(k-1)$ 阶导数都等于零来表征. 他证明了奇点是尖点、普通点和拐点的混合点. 此外，De Gua 论述了曲线的中点，曲线延伸到无穷的分支的形式，以及这种分支的性质.

Maclaurin 在他十九岁时写的《有机的几何学》(*Geometria Organica*, 1720) 中证明了，一条 n 次不可约曲线的二重点的最多个数是 $(n-1)(n-2)/2$. 为此他把一个 k 重点当作 $\frac{k(k-1)}{2}$ 个二重点. 他还给出了各类更高重数多重点的个数的上界. 然后他引进了代数曲线亏数 (deficiency, 后来叫做 genus) 的概念，即二重点的最大可能的个数减去实际二重点的个数. 亏数为 0 或具有最大可能二重点个数的曲线受到了很大的注意. 这些曲线也叫做有理曲线或单行(unicursal)曲线. 几何上，一条单行曲线可以由一个动点的连续运动描出(但是可以通过无穷远点). 例如圆锥曲线，包括双曲线，都是单行曲线.

Newton 在他的《流数法》中，给出了在一个多重点上，确定曲线各分支的级数表示的方法，通常叫做 Newton 图或 Newton 平行四边形 (第 20 章第 2 节). De Gua 在《利用》中用一个代数三角形(triangle algébrique)来代替 Newton 平行四边形. 因此，如果原点是奇点，则对于小的 x，代数曲线的方程就分解成形如 y^m-Ax^n 的因子，其中 m 是正整数而 n 是整数. n 是正整数的那些

因子给出了曲线的分支. Euler 注意到(1749)de Gua 忽略了虚的分支.

Gabriel Cramer (1704～1752), 在他的《代数曲线的解析引论》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1750) 中, 为了确定曲线的每个分支的级数表达式, 特别是确定延伸到无穷远的分支的级数表达式, 他还解决了当 y 和 x 之间的关系是由隐函数, 即 $f(x, y)=0$, 给出时, y 用 x 来展开的问题. 他把 y 展成 x 的升幂级数或降幂级数. 和 de Gua 一样, 他也用三角形来代替 Newton 的平行四边形, 他也和别的作者一样忽略了曲线的虚分支.

对于曲线在一个多重点上的各分支, 由于求得了它们的级数展开而产生的结论, 在更晚一些时候由 Victor Puiseux (1820～1883)[9] 推得, 因而通常叫做 Puiseux 定理: 代数平面曲线上一点 (x_0, y_0) 的全邻域能表为有限个展开

$$y-y_0=a_1(x-x_0)^{q_1/q_0}+a_2(x-x_0)^{q_2/q_0}+\cdots. \tag{7}$$

这些展开在 x_0 的某个区间内收敛而且所有的 q_i 没有公因子. 每一个展开给出的那些点就叫做这条代数曲线的一个分支.

曲线和直线的交点, 以及两条曲线的交点, 是另一个受到很大注意的课题. Stirling 在他 1717 年写的《三次曲线》中证明了, (x 和 y 的) n 次代数曲线由该曲线的 $n(n+3)/2$ 个点所决定, 因为这种曲线有 $n(n+3)/2$ 个本质系数. 他还断言, 任两平行线切割一条给定的曲线, 它们的交点(实的或虚的)个数相同, 而且他证明了, 延伸到无穷远的曲线的分支的个数是偶数. Maclaurin 的工作, 《有机的几何学》, 创立了高次平面曲线交的理论. 他推广了由特殊情形所得到的结果, 而且在此基础上得出结论: m 次方程和 n 次方程交于 mn 个点.

1748 年 Euler 和 Cramer 企图证明这个结果, 但都没有给出

(9) *Jour. de Math.*, 13, 1850, 365～480.

正确的证明．Euler[10]依靠一种类比的论证；认识到他的这种论证是不完全的，他说人们应该把这种方法用到特殊的例子上去．Cramer在他的1750年的书中的"证明"完全依靠例子，这种证明无疑是不能接受的．两个人都考虑了具有虚坐标的交点和无穷远的公共点，而且注意到，仅当两种类型的点都包括在内而且两条曲线没有$ax+by$那样的公因子时，交点个数才能达到mn．然而，两个人都没能确定若干类型交点的特有的相重数．1764年Etienne Bezout (1730～1783)对这个定理给出了一个较好的证明，但是在计算无穷远点和多重点的相重数方面，证明也是不完全的．真正计算相重数的问题是由Georges-Henri Halphen (1844～1889) 在1873年解决的[11]．

Cramer在他1750年的书中重新研究了Maclaurin在他的«几何»中已经注意到的一个涉及两条曲线的交点个数的悖论．一条n次曲线由$n(n+3)/2$个点决定．两条n次曲线相交于n^2个点．如果现在n是3，则由第一句话，这条曲线应该由九个点决定．但是由于两条三次曲线相交于9个点，这九个点不能唯一地决定一条三次曲线．当$n=4$时产生了类似的悖论．Cramer关于这个悖论(现在被看作是他的)的解释是：确定n^2个交点的n^2个方程不是独立的．通过一条给定三次曲线上八个固定点的所有三次曲线都一定通过该曲线上第九个固定点，即第九个点是依赖于头八个点的．Euler在1748年给出了同样的解释[12]．

1756年Matthieu B. Goudin (1734～1817)和Achille-Pierre Dionis du Séjour (1734～1794)写成了«代数曲线论» (*Traité des courbes algébriques*)．该书的新特点是：一条n阶(次)曲线在一

(10) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 4, 1748, 234～248=*Opera*, (1), 26, 46～59.

(11) *Bull. Soc. Math. de France*, 1, 1873, 130～148; 2, 1873, 34～52; 3, 1875, 76～92=*Œuvres*, 1, 98～157, 171～193, 337～357.

(12) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 4, 1748, 219～233, pub. 1750=*Opera*, (1), 26, 33～45.

给定方向不可能有多于 $n(n-1)$ 条的切线，其渐近线也不能多于 n 条. 就象 Maclaurin 已经指出过的那样，他们指出一条渐近线与曲线相交，交点不能多于 $n-2$ 个.

十八世纪关于高次平面曲线成果的两本最好的简明而广泛的著述，是 Euler 的«引论»(1748)第二卷和 Cramer 的«代数曲线论» (*Lignes courbes algébriques*). 后一本书有统一的观点，出色地作了详细的阐述，并包括许多好的例题. 这本书经常被引用，以至把原来并非 Cramer 的结果也当作是 Cramer 的了.

4. 微分几何的开端

当解析几何正在发展的时候，微分几何也就开始了，而且这两门学科的发展常常是交织在一起的. 十八世纪后期对代数曲线理论的兴趣衰落了，但是就几何而言，微分几何变得更加重要了. 微分几何是研究曲线和曲面逐点变化的那些性质的，因此只有用微积分的技巧才能掌握. "微分几何"这个术语是 Luigi Bianchi (1856～1928)在1894年第一次使用的.

微分几何在很大程度上是微积分本身的问题的自然产物. 曲线的法线、拐点和曲率的研究实际上就是平面曲线的微分几何. 但是，十七世纪后期和十八世纪早期的许多新问题，关于平面和空间曲线的曲率，曲线族的包络，曲面上的测地线，光线及光的波阵面的研究，沿着曲线以及曲面施加约束的运动的动力学问题，尤其是地图绘制方面的知识都导致关于曲线和曲面的问题；显然所有这一切必须应用微积分.

尽管分析的论证优于图形，但十八世纪甚至十九世纪前期的微分几何的研究家都把几何论证和分析论证结合在一起使用. 分析仍然是粗糙的. 自变量的无穷小 (infinitesimal) 或微分 (differential) 被认为是一个极小的常数. 应变量的增量及其微分之间

没有作出实质的区别. 考虑了高阶微分，但认为它们都是小量而且可以自由地略掉. 如果曲线上相邻两点间的距离充分小. 数学家们就说它们是曲线上的相邻点或说是曲线上靠近的点，好象两个相邻点之间再也没有别的点似的；因此曲线的切线是连接曲线上一点及其相邻点的连线。

5. 平面曲线

微积分对曲线研究的第一个应用是处理平面曲线. Christian Huygens 引进了后来用微积分处理的几个概念，他用的是纯几何方法. 他对光线研究和摆钟设计的兴趣推动了他在这方面的工作. 1673 年，在他的《钟表的振动》(*Horologium Oscillatorium*)第三章中他引进了平面曲线 C 的渐伸线. 设想一条绳子从 P_1 点往右绕在 C 上 (见图 23.10). 端点 P_1 固定在 C 上，绳的另一端不绕在 C 上但使绳子保持绷紧. 自由端的轨迹 C' 是 C 的一条渐伸线. Huygens 证明了，在绳子的自由端，绳子垂直于轨迹 C'. 绳的每一点也描出一条渐伸线；例如 C'' 也是一条渐伸线. 但 Huygens 证明了各条渐伸线不能互相接触. 由于绳子在它刚要离开 C 的点处与 C 相切，由此可见曲线切线族的每一个正交轨道是曲线的一条渐伸线.

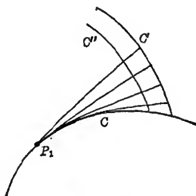


图 23.10

然后 Huygens 讨论了平面曲线的渐屈线. 设在曲线上 P 点处给了一条固定的法线，当一条相邻的法线移向这固定的法线时，这两条法线的交点在固定法线上达到一个极限位置，它就叫做曲线在 P 点的曲率中心. Huygens 证明了，曲线上的点沿固定法线到这极限位置的距离(用现代的记号)是

$$\frac{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}.$$

这个长度是曲线在 P 点的曲率半径. 连接每一法线上的曲率中心的轨迹叫做原曲线的渐屈线. 因此, 前面所说的曲线 C 就是它的任一渐伸线的渐屈线. 在这部著作中 Huygens 证明了摆线的渐屈线还是摆线, 或者更确切地说, 图 23.11 中下方摆线的左半部分的渐屈线是上方摆线的右半部分. Euler 在 1764 年解析地证明了这个定理[13].

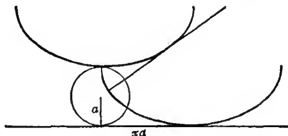


图 23.11

对于 Huygens 的摆钟工作来说, 摆线的重要意义就在于: 沿着摆线弧摆动的摆锤, 不论其振幅是大是小, 作一次完全摆动所用的时间是完全相同的. 由于这个缘故, 摆线又叫做等时曲线.

Newton 在他的«解析几何»(*Geometria Analytica*)中(虽然该书的大部分大约写于 1671 年, 但出版于 1736 年)也引进了曲率中心, 作为 P 点的法线及其邻点法线的交点的极限点. 然后 Newton 说, 圆心在曲率中心、半径等于曲率半径的圆是在 P 点与曲线最密接的圆; 就是说, 在曲线和最密接圆之间, 不会有别的圆在 P 点和曲线相切. 这个最密接的圆叫做密切圆, Leibniz 在 1686 年的一篇文章[14]中已经用了"密切"这个术语. 密切圆的曲率是其半径的倒数而且是曲线在 P 点的曲率. Newton 也给出了曲率的公式, 并计算了一些曲线, 包括摆线在内的曲率. 他注意到曲线在拐点处的曲率为零. 这些结果都是重复 Huygens 的结果, 但可能是 Newton 想表明他能用解析方法来建立这些结果.

1691 年 John Bernoulli 着手研究平面曲线的课题, 并得到了

(13) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 179～198, pub. 1766=*Opera*, (1), 27, 384～400.

(14) *Acta Erud.*, 1686, 289～292=*Math. Schriften*, 7, 326～329.

关于包络的一些新结果. Tschirnhausen 在 1682 年曾引进过光线族的焦散(caustic),即光线族的包络. 在 1692 年的《教师学报》中, Bernoulli 得到了某些焦散的方程, 例如当一束平行光线投射到球面镜上时, 从球面镜上反射出来的光线的焦散的方程[15]. 然后他解决了 Fatio de Duillier 向他提出的问题, 即要找出一族抛物线的包络, 这族抛物线是一门大炮以相同的初速度但以不同的仰角发射的炮弹的路径. Bernoulli 证明了,这包络是一条以炮位为焦点的抛物线. 这个结果是 Torricelli 曾经从几何上证实了的. 在 1692 年和 1694 年的《教师学报》上[16], Leibniz 给出了求一族曲线的包络的普遍方法. 设曲线族(用我们的记号)是由 $f(x, y, \alpha)=0$ 给出, 其中 α 是曲线族的参数, 这个方法要求在 $f=0$ 和 $\partial f/\partial\alpha=0$ 间消去 α. L'Hospital 的教科书《无穷小分析》(*L'Analyse des infiniment petits*, 1696), 帮助完成并传播了平面曲线的理论.

6. 空间曲线

Clairaut 开创了空间曲线的理论——三维微分几何的第一个重大发展. Alexis-Claude Clairaut(1713～1765)是早熟的. 早在十二岁时他就写了一本关于曲线的很好的书. 1731 年他发表了《关于双重曲率曲线的研究》(*Recherche sur les courbes à double courbure*), 该书写于 1729 年, 那时他只有十六岁. 在该书中他论述了曲面和空间曲线的解析学(第 2 节). Clairaut 的另一篇论文使他在十七岁这样前所未有的年龄被选进了法国科学院. 1743 年他出版了他关于地球形状的经典著作. 这里他以比 Newton 或 Maclaurin 更完全的形式论述了旋转体的形状, 例如当地球在其各

(15) *Opera*, 1, 52～59.

(16) Page 311; 也见 *Math. Schriften*, 2, 166; 3, 967, 969.

部分相互间的万有引力作用下所取的形状. 他还在三体问题方面进行过工作,主要是研究月球的运动(第21章第7节))而且写了几篇关于这个问题的论文,其中有一篇得到了彼得堡科学院1750年的奖金. 1763年他发表了«关于月球的理论»(*Théorie de la lune*). Clairaut具有伟人的魅力而且是巴黎社会中的一个知名人物.

在他1731年的著作中,他解析地论述了空间中曲线的基本问题. 他把空间曲线叫做"双曲率曲线",因为他信奉Descartes,考虑了空间曲线在两个垂直平面上的投影. 于是空间曲线就分享了两条平面曲线的曲率. 几何上他把一条空间曲线看作是两个曲面的交线;分析上每个曲面的方程表为一个三变量的方程(第2节). 然后Clairaut研究了双曲率曲线的切线. 他领悟到一条空间曲线在一个垂直于切线的平面上可以有无穷多条法线. 空间曲线弧长的表达式以及某些曲面面积的求积公式也是属于他的.

虽然Clairaut在空间曲线的理论方面迈出了几步,但是在1750年前后在空间曲线理论或曲面理论方面所做的工作是微不足道的. 这一点反映在Euler 1748年的«引论»中,该书介绍了平面和空间图形的微分几何. 平面部分相当完全,但空间部分是不够的.

空间曲线微分几何发展中的第二个重大步骤是由Euler采取的. Euler在力学中应用了曲线和曲面,推动了他在微分几何方面的许多工作. 他二十九岁时写的«力学»(*Mechanica*, 1736)[17]是对力学分析基础的一个重大贡献. 在他的«固体或刚体的运动理论»(*Theoria Motus Corporum Solidorum seu Rigidorum*, 1765)[18]中,他给出了关于这个课题的另一种处理. 在该书中他导出了通常所用的沿一条平面曲线运动的质点的加速度的径向和法向分量的极坐标公式,即

(17) *Opera*, (2), 1和2.
(18) *Opera*, (2), 3和4.

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

他在 1774 年开始在空间曲线理论方面进行写作. 对扭曲橡皮带所取形状的研究很象是推动 Euler 去研究空间曲线理论的一个特殊问题,这个问题是:开始是直的橡皮带,在两端压力作用下扭弯成一条扭曲的曲线,求这曲线所取的形状. 为了处理这个问题,他在 1774 年引进了一些新的概念[19]. 然后他在 1775 年提出的一篇论文[20]中给出了关于扭曲线理论的完整论述.

Euler 用参数方程 $x=x(s)$, $y=y(s)$, $z=z(s)$ 表示空间曲线,其中 s 是弧长,他和十八世纪的其他作者一样用球面三角来进行分析. 从参数方程他得到

$$dx=p\,ds,\quad dy=q\,ds,\quad dz=r\,ds,$$

其中 p, q 和 r 都是逐点变化的方向余弦,当然要 $p^2+q^2+r^2=1$. 量 ds, 即自变量的微分,他是作为一个常量看待的.

为了研究曲线的性质,他引进了球面指标线. 围绕曲线的任一点 (x, y, z), Euler 画了一个半径为 1 的球. 可以把球面指标线定义为单位球上那样一些点的轨迹,从中心 O 射向这些点的位置向量,就等于 (x, y, z) 点的单位切向量和 (x, y, z) 的邻近点的单位切向量. 比如图 23.12 中的两个半径就表示曲线在 (x, y, z) 点的单位切向量和其一个邻近点的单位切向量. 设 ds' 是曲线上相距 ds 的两点的两个相邻切线间的弧或角. Euler 关于该曲线的曲率半径的定义便是



图 23.12

$$\frac{ds'}{ds}.$$

(19) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 19, 1774, 340~370, pub. 1775=*Opera*, (2), 11, 158~179.

(20) *Acta Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1782, 19~57, pub. 1786=*Opera*, (1), 28, 348~381.

然后他推导了曲率半径的一个解析表达式:

$$(8)\qquad \rho=\frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}}\quad\left[=\frac{1}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right].$$

通过 ds' 和中心 O 的平面就是 Euler 的关于曲线在 (x, y, z) 点的密切平面的定义. John Bernoulli——他引进了密切平面这个术语——认为密切平面是由三个"重迭"的点决定的. Euler 给出的密切平面的方程是

$$x(rdq-qdr)+y(pdr-rdp)+z(qdp-pdq)=t,$$

其中 t 是由曲线与密切平面的交点 (x, y, z) 确定的. 这个方程等价于现今我们用向量记号写的方程

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{r}''=0,$$

其中 $\boldsymbol{r}(s)$ 是曲线与密切平面的交点关于空间某点的位置向量, 而 $\boldsymbol{R}$ 是密切平面上任一点的位置向量. $\boldsymbol{r}$ 的向量形式由

$$x(s)\boldsymbol{i}+y(s)\boldsymbol{j}+z(s)\boldsymbol{k}$$

给出, 而 $\boldsymbol{R}$ 的形式为 $X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k}$, 其中 (X, Y, Z) 是 $\boldsymbol{R}$ 的坐标.

Clairaut 曾经引进了空间曲线有两个曲率的想法. 其中的一个曲率由 Euler 以刚才叙述过的方式加以标准化. 另一个曲率, 现在叫"挠率", 几何上表示一条曲线从 (x, y, z) 点处的一个平面离开的速率, 是由工程师和数学家 Michel-Ange Lancret (1774～1807) 用分析方法求出它的显式表示的. Lancret 是 Monge 的学生而且按 Monge 的精神进行研究工作. 他在曲线的任一点处选出了三个主方向[21]. 第一个主方向是切线方向. "逐次的"切线位于密切平面内. 位于密切平面内的法线是主法线, 第二个主方向是主法线方向. 垂直于密切平面的法线是次法线, 次法线方向是第三个主方向. 挠率是次法线方向关于弧长的变化率. Lancret 用了逐次密切平面的拐度(flexion)或逐次次法线之类的术语.

(21) *Mém. divers Savans*, 1, 1806, 416～454.

Lancret 用

$$x=\phi(z),\quad y=\psi(z)$$

表示一条曲线,并把 $d\mu$ 叫做逐次法平面之间的夹角,而把 $d\nu$ 叫做逐次密切平面之间的夹角. 于是用近代的记号来写便有

$$\frac{d\mu}{ds}=\frac{1}{\rho},\quad \frac{d\nu}{ds}=\frac{1}{\tau},$$

其中 ρ 是曲率半径,而 τ 是挠率半径.

Cauchy 在他著名的《无穷小计算在几何上的应用教程》(*Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, 1826) 中改进了概念的陈述而且澄清了空间曲线理论中的许多问题[22]. 他抛弃了常量无穷小 ds, 并且纠正了存在于增量和微分间的混乱. 他指出,当人们写下

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

时,就应该理解为

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Cauchy 喜欢把曲面写成 $w(x, y, z)=0$ 来代替不对称的形式 $z=f(x, y)$, 他把通过点 (ξ, η, ζ) 的直线方程写作

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma},$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, 和 $\cos\gamma$ 是直线的方向余弦, 不过 Cauchy 更常用方向数来代替方向余弦.

Cauchy 发展的曲线的几何理论实际上是现代的. 他在证明中摆脱了球面三角学, 但他也把弧长取作自变量. 他得到了任一点处切线的方向余弦

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}\ \text{或}\ x'(s),\ y'(s),\ z'(s).$$

证明了主法线的方向数是

(22) *Œuvres*, (2), 5.

$$\frac{d^2x}{ds^2},\ \frac{d^2y}{ds^2},\ \frac{d^2z}{ds^2}\ \text{或}\ x''(s),\ y''(s),\ z''(s),$$

而且曲线的曲率 k 是

$$k=\frac{1}{\rho}=\sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2}.$$

然后他证明了，如果切线的方向余弦是 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, 和 $\cos\gamma$, 则

$$\text{(9)}\quad \begin{gathered} x''=\frac{d(\cos\alpha)}{ds}=\frac{\cos\lambda}{\rho},\quad y''=\frac{d(\cos\beta)}{ds}=\frac{\cos\mu}{\rho},\\ z''=\frac{d(\cos\gamma)}{ds}=\frac{\cos\nu}{\rho}, \end{gathered}$$

其中 ρ 是已经介绍过的曲率半径，而 $\cos\lambda$, $\cos\mu$, 和 $\cos\nu$ 是一条法线的方向余弦，这条法线他取为主法线．其次他证明了

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\omega}{ds},$$

其中 ω 是相邻切线间的夹角．

他把切线和主法线决定的平面作为密切平面．这个平面的法线是次法线，而次法线的方向余弦 $\cos L$, $\cos M$, 和 $\cos N$ 由下列公式给出：

$$\frac{\cos L}{dyd^2z-dzd^2y}=\frac{\cos M}{dzd^2x-dxd^2z}=\frac{\cos N}{dxd^2y-dyd^2x}.$$

然后他能证明

$$\text{(10)}\quad \frac{d\cos L}{ds}=\frac{\cos\lambda}{\tau},\quad \frac{d\cos M}{ds}=\frac{\cos\mu}{\tau},\quad \frac{d\cos N}{ds}=\frac{\cos\nu}{\tau},$$

其中 $\dfrac{1}{\tau}$ 是挠率，并证明挠率等于 $d\Omega/ds$, 这里 Ω 是密切平面间的夹角．

公式 (9) 和 (10) 是三个著名的 Serret-Frénet 公式中的两个，第三个公式是

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=-\frac{\cos\alpha}{\rho}-\frac{\cos L}{\tau},$$

$$\frac{d\cos\mu}{ds}=-\frac{\cos\beta}{\rho}-\frac{\cos M}{\tau},\qquad (11)$$

$$\frac{d\cos\nu}{ds}=-\frac{\cos\gamma}{\rho}-\frac{\cos N}{\tau},$$

其中 $1/\tau$ 是挠率而 $1/\rho$ 是曲率. 公式(9), (10), 和(11)分别给出了切线, 次法线, 和法线的方向余弦的导数, 它们是由 Joseph Alfred Serret (1819～1885) 在1851年[23]和 Fréderic-Jean Frénet (1816～1900)在1852年[24]发表的. 曲率和挠率的意义在于它们是空间曲线的两个根本的性质. 作为曲线弧长的函数的曲率和挠率给定之后, 除了曲线在空间的摆法外, 曲线就完全被决定了. 这个定理在 Serret-Frénet 公式的基础上是容易证明的.

7. 曲面的理论

和空间曲线的理论一样, 曲面理论也经历了一个漫长的开端. 曲面理论是从曲面 (主要是地球) 上的测地线的研究开始的. 在1697年的《博学者杂志》(*Journal des Sçavans*) 中, John Bernoulli 提出了在一凸曲面上求两点间最短弧的问题[25]. 他在1698年写信给 Leibniz 指出, 测地线上任何一点处的密切平面 (密切圆平面)在该点垂直于曲面. 1698年 James Bernoulli 解决了柱面, 锥面和旋转曲面上的测地线问题. 尽管在1728年 John Bernoulli[26] 用 James 的方法取得了某种成功并且求得了另外几类曲面的测地线, 但 James 的方法是有局限性的方法.

1728年 Euler[27]给出了曲面上测地线的微分方程. Euler 用

(23) *Jour. de Math.*, 16, 1851, 193～207.
(24) *Jour. de Math.*, 17, 1852, 437～447.
(25) *Opera*, 1, 204～205.
(26) *Opera*, 4, 108～128.
(27) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1728, 110～124, pub. 1732=*Opera*, (1), 25, 1～12.

的是他在变分法中引进的方法(见第24章第2节),1732年Jacob Hermann[28]也求出了一些特殊曲面上的测地线.

Clairaut在他1733年和1739年[29]关于地球形状的著作中更充分地讨论了旋转曲面上的测地线. 他在1733年的论文中证明了,对于任何旋转曲面来说,测地线和穿过这测地线的任何子午线(任何位置的母曲线)的夹角的正弦同交点到旋转轴的垂直距离成反比. 在另一篇论文[30]中, 他还证明了一个漂亮的定理, 即在旋转曲面的任何一点M处, 如果一平面通过M点且垂直于曲面和过M点的子午面,则这平面与曲面的交线在M点的曲率半径等于法线在M点和旋转轴之间的长度. Clairaut用的是分析的方法, 但他和他的大多数前辈一样, 他没有使用现在与变分法联系在一起的那些思想.

1760年Euler在他的《关于曲面上曲线的研究》(*Recherches sur la courbure des surfaces*)[31]中建立了曲面的理论. 这本著作是Euler对微分几何最重要的贡献, 而且是微分几何发展史中的一个里程碑. 他把曲面表为$z=f(x, y)$而且引进了现代的标准符号

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},\ r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

然后他说,“我从决定曲面的任何平面截线的曲率半径开始; 然后把这种做法应用到曲面在任一给定点处的垂直截线上去; 最后我在这些截线的相互倾斜程度方面比较它们的曲率半径, 这种倾斜程度就使我们能够建立曲面曲率的真正概念.”

他首先对曲面的任何平面截线的曲率半径得到一个相当复杂

(28) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 36～67.

(29) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1733, 186～194, pub. 1735 和 1739, 83～96, pub. 1741.

(30) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1735, 117～122, pub. 1738.

(31) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 16, 1760, 119～143, pub. 1767=*Opera*, (1), 28, 1～22.

的表达式. 然后把这个结果用到法向截面(包含曲面的一条法线的平面)上去,将所得的结果特殊化. 对于法截线,曲率半径的一般表达式稍稍简化了一点. 其次他把垂直于 xy 平面的法向截面定义为主法向截面. ("主"的这种用法今天是不用了.) 设法向截面和主法向截面的夹角为 ϕ, 则法截线的曲率半径的公式为

$$\frac{1}{L+M\cos 2\phi+N\sin 2\phi}, \tag{12}$$

其中 L, M, 和 N 是 x 和 y 的函数. 为了得到过曲面上一点的所有法截线的最大和最小曲率(或者, 当 (12) 中分母的形式是不定时, 为了得到两个最大曲率), 他令分母关于 ϕ 的导数等于零而且(在两种情形都)得到 $\operatorname{tg} 2\phi=N/M$. 存在两个相差 90° 的根, 所以有两个互相垂直的法平面. 我们把这两个平面上相应的曲率叫做主曲率 $\varkappa_1$ 和 $\varkappa_2$.

从 Euler 的结果推得, 任何一个和主曲率所在法截面之一成 α 角的法截面,其上截线的曲率 $\varkappa$ 为

$$\varkappa=\varkappa_1\cos^2\alpha+\varkappa_2\sin^2\alpha. \tag{13}$$

这个结果叫做 Euler 定理.

Monge 的学生, Jean-Baptiste-Marie-Charles Meusnier de La Place (1754～1793), 在 1776 年以更加精细的方式得到同样的结果, 他和 Lavoisier 一起还在流体静力学和化学方面进行工作. 然后 Meusnier[32] 处理了非法截线的曲率, Euler 对此曾经得到过一个非常复杂的表达式. Meusnier的结果, 也叫 Meusnier 定理,说, 曲面在 P 点的平面截线的曲率是通过在 P 点的同一切线的法截线的曲率除以原平面和 P 点的切平面之夹角的正弦. 由此得到一个漂亮的结果, 即如果考虑通过曲面上同一条切线 MM' 的平面族, 这些平面截曲面所得各截线的曲率中心就都位于一个圆上, 这个圆所在的平面垂直于 MM', 它的直径就是法截线的曲率半径.

(32) *Mém. divers Savans*, 10, 1785, 477～485.

然后 Meusnier 证明了这样一个定理：两个主曲率处处相等的曲面只有平面和球面．他的论文异常简单而且内容丰富；这有助于使十八世纪所达到的许多结果直观化．

曲面论的一个主要方面是由于绘制地图的需要而发展起来的，这就是研究可展曲面，即可以将其平摊在平面上而不产生畸变的曲面．因为球面不能切开来这样摊平，于是问题就要求寻找一张形状与球面接近而又能不发生畸变地铺开的曲面．Euler 是研究这个问题的第一个人．这个工作包含在他的《论表面可以展平的立体》(De Solidis Quorum Superficiem in Planum Explicare Licet)[33]中．在十八世纪，曲面被认为是固体的边界；这就是为什么 Euler 要说立体的表面可以展平在一张平面上的原因．在这篇论文中他引进了曲面的参数表示，即

$$x=x(t,\ u),\quad y=y(t,\ u),\quad z=z(t,\ u),$$

并且寻求：要使曲面可以展开在平面上，这些函数必须满足什么样的条件．他的方法是把 t 和 u 表为平面上的直角坐标，然后形成一个小的直角三角形 $(t,\ u)$，$(t+dt,\ u)$，$(t,\ u+du)$．因为曲面是可展的，所以这个三角形一定和曲面上的一个小三角形全等．如果用 l, m 和 n 表示 x, y 和 z 关于 t 的偏导数，用 λ,μ,ν 表示 x, y 和 z 关于 u 的偏导数，那么在曲面上相应的三角形是 $(x,\ y,\ z)$，$(x+ldt,\ y+mdt,\ z+ndt)$，和 $(x+\lambda du,\ y+\mu du,\ z+\nu du)$．从两个三角形的全等 Euler 推导出

$$(14)\qquad l^2+m^2+n^2=1,\quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,\quad l\lambda+m\mu+n\nu=0.$$

这些就是可展性的分析的必要充分条件．这个条件等价于要求曲面上的线元素与平面上的线元素相等．分析上，决定一个曲面是否可展的问题就是寻求曲面的一个参数表示 $x(t,\ u)$，$y(t,\ u)$，和 $z(t,\ u)$，使得它们的偏导数满足条件(14)．

---

(33) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16, 1771, 3～34, pub. 1772＝*Opera*, (1), 28, 161～136.

然后 Euler 研究了空间曲线和可展曲面之间的关系并且证明了，任何空间曲线的切线族填满或构成一可展曲面．他试图证明每个可展曲面都是直纹面，就是说，由直线移动而生成的曲面，并且逆定理也对，但是没有成功．事实上，逆定理是不对的．

Gaspard Monge 独立地研讨了可展曲面的课题．在 Monge 那里几何和分析是相辅相成的．他把同一个问题的几何方面和分析方面统括起来并且说明既从几何上又从分析上进行思考的好处．在十八世纪，尽管有 Euler 和 Clairaut 的解析几何和微分几何，但是因为分析支配着这一世纪，所以 Monge 的双重观点的效果是把几何置于至少和分析同等的基础上，从而鼓舞了纯粹几何的复活．Monge 是继 Desargues 之后在综合几何方面第一个真正的革新者．

Monge 在画法几何（这原先是为建筑学服务的），解析几何，微分几何，常微分方程和偏微分方程方面范围广阔的工作赢得了 Lagrange 的钦佩和羡慕．Lagrange 在听了 Monge 的一次讲演后对他说："我亲爱的同事，你刚才提出了许多第一流的成果，要是我能够做出来就好了．" Monge 对物理学，化学，冶金学（锻造问题），和机械学都作了许多贡献．在化学方面他和 Lavoisier 一起工作．Monge 看到了工业发展对科学的需求，而且提倡把工业化作为改善生活的一个途径．也许是因为他懂得出身卑贱的苦难，所以他热衷于活跃的社会事务．正因为这个原因，他支持法国革命并在革命以后的政府中担任海军部长和公众健康委员会的委员．他设计过武器装备，还用技术思想来指导政府职员．由于他对 Bonaparte 的钦佩，使他成为 Bonaparte 反革命措施的一个追随者．

Monge 帮助组织了多科工艺学校，在那里作为一个教授建立了一个几何学派．他是一个伟大的教师而且是一支鼓舞十九世纪数学活动的力量．他的生气勃勃内容丰富的讲演激起了学生们的积极性，在他们中间至少有十二人是十九世纪早期最著名的人物．

Monge 在三维微分几何方面开创的结果远远超过 Euler. 他 1771 年的论文《关于曲率半径以及重曲率曲线的各种拐点的论文》(*Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*), 发表得很晚[34], 之后是他的《关于把分析应用于几何的活页论文》(*Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*, 1795, 第二版 1801). 《活页论文》中微分几何的份量和解析几何及偏微分方程的份量一样多. 这篇论文, 在讲演笔记的基础上, 把一些老的结果加以系统化并作了扩充, 提出了有某种重要性的一些新结果, 并把曲线和曲面的各种性质翻译成偏微分方程的语言. 在寻求分析思想和几何思想的对应关系时, Monge 认识到一族具有共同几何性质或用同一种生成方法定义的曲面应满足一个偏微分方程(参看第 22 章第 6 节).

Monge 的第一个重要工作, 即关于双重曲率曲线的可展曲面的论文, 研究了空间曲线及与之相连系的曲面. 那时 Monge 并不知道 Euler 关于可展曲面的工作. 他把空间曲线或者作为两曲面的交线, 或者用它们在两个互相垂直的平面上的投影来处理, 即由 $y=\phi(x)$ 和 $z=\psi(x)$ 给出. 在任一寻常点处, 有无穷多条法线(垂直于切线)位于同一平面——法平面上. 在这个法平面上有一条线, 他称之为 (极) 轴. 就是该法平面和相邻法平面交线的极限位置. 当沿着曲线移动时, 诸法平面的包络是一可展曲面, 叫做配极可展曲面. 诸法平面的轴也扫过这曲面. 从 P 点到 P 点处法平面的轴的垂线就是主法线, 而垂足 Q 就是曲率中心.

为了求得配极可展曲面的方程, 他求出了法平面的方程, 并从这一方程及其对 x 的偏导数之间消去 x. 他还给出了求任何单参数平面族的包络的一个法则, 这个法则我们现在还在使用. 这个法则同样适用于单参数曲面族, 用我们的记号这个法则就是: 取

(34) *Mém. divers Savans*, 10, 1785, 511～550.

$F(x, y, z, \alpha)=0$ 为单参数平面族. 为了求得这族平面和"一个无限靠近的曲面" 相交在什么地方, 他求 $\partial F/\partial\alpha=0$. 这两曲面的交线叫特征线, 在 $F=0$ 和 $\partial F/\partial\alpha=0$ 间消去 α 就求得包络的方程. 他应用这种方法去研究其他的可展曲面, 他把每一张这样的可展曲面都看成是一个单参数平面族的包络.

Monge 还研究了可展曲面的脊线(*arête de rebroussement*),这是由生成曲面的一组直线形成的. 任意两条相邻直线的交是一个点,而这种点的轨迹就是脊线 Γ. 于是与 Γ 相切的直线都是母线或者说 Γ 是生成直线族的包络. 脊线把可展曲面分成两叶, 就象平面曲线上的尖点把曲线分成两部分一样. Monge 得到了脊线的方程. 在空间曲线的配极可展曲面的情形, 脊线就是原空间曲线的曲率中心的轨迹.

1775 年 Monge 向科学院提交了另一篇关于曲面, 特别是关于在影子和半阴影 (shadows and penumbras) 理论中碰到的可展曲面的论文[35]. 用了可展曲面能摊平在平面上而不发生畸变这一定义,他直观地论述了可展曲面是直纹面(但是反之不真),在这直纹面上两条相邻直线是共点的或是平行的, 而且论述了任何可展曲面等价于由空间曲线的切线生成的曲面. 正是在 1775 年的这篇文章中, 他给出了可展曲面的一个一般表示. 它们的方程总有这样的形式:

$$z=x[F(q)-qF'(q)]+f(q)-qf'(q),$$

其中 $q=\partial z/\partial y$, 而且, 除了垂直于 xy-平面的柱面外, 这种曲面满足的偏微分方程总是

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=0.$$

然后 Monge 研究了直纹面并且给出了直纹面的一个一般表示. 他还给出了直纹面满足的三阶偏微分方程, 并且对它们进行

(35) *Mém. divers Savans*, 9, 1780, 382～440.

了积分．然后他证明了可展曲面是一种特殊的直纹面．

在1776年«关于开挖和回填的理论的论文» (*Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais*)[36]中，Monge研究了在城堡的建筑中出现的问题，这个问题涉及到把土或其他材料从一个地方输送到另一个地方，并且要寻找一种最有效的办法来做这件事，即输送的材料乘上输送的距离应该达到极小．对于曲面的微分几何而言，这个工作只有一部分是重要的；事实上，这个实际问题的结果并不太现实，而正如Monge所说，他发表这篇论文是为了发表论文中的几何结果．文中他从处理依赖于两个参数的一族直线或线汇这个课题着手．然后遵循Euler和Meusnier的工作，他考虑了曲面S的法线族，它们也构成一个线汇．特别考虑了沿一条曲率线的法线，曲率线是曲面上这样一条曲线，在该曲线的每一点上有一个主曲率．在曲率线的这些点上的曲面法线构成一个可展曲面，叫做法可展曲面．类似地，沿垂直于第一条曲率线的曲率线的曲面法线也构成一个可展曲面．因为在曲面上有两族曲率线，所以有两族可展曲面，一族中的可展曲面与另一族中的可展曲面相互正交．事实上，任意两个这样的可展曲面的交线上的点都在一曲面法线上．在每一条法线上有两点，它们到曲面的距离等于两个主曲率的大小．每一个由主曲率之一确定的点集，在垂直于曲率线的法线上的那个点集，位于由那个法线族构成的可展曲面的脊线上，所以法线和那条脊线相切．一族可展曲面的全部脊线组成一曲面，叫做中心曲面．于是

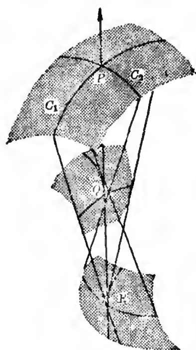


图　23.13

(36) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris,* 1781, 666～704, pub. 1784.

有两张这样的中心曲面(图 23.13). 每族可展曲面的包络叫做焦曲面.

Monge 关于曲面族,满足非线性和线性一阶,二阶,甚至三阶偏微分方程的曲面族的研究工作的进一步细节对于偏微分方程课题来说意义更大.

Monge 往往喜欢通过对许多具体的曲线和曲面的充分论述来阐明他的思想. 他的思想的推广和运用是由十九世纪的数学家们去实现的. Monge 总是面向实际, 他以一个怎样能把他的理论应用到建筑上去的设想, 特别是用于大会议厅的建造的设想来结束他的《活页论文》.

对曲面论的一些别的方面的贡献是由 Monge 的一个学生 Charles Dupin (1784～1873) 做出的. Dupin 作为一个造船工程师毕业于多科工艺学校,他和 Monge 一样,经常把几何的应用记在心里. 他的教科书《几何学的发展》(*Développements de géométrie*, 1813) 加了一个副标题"在船舰的稳定性,开挖和回填,防御工事,光学等方面的应用", 在其他著作中值得注意的是他的《几何学和力学的应用》(*Applications de géométrie et de mécanique*, 1822), 他做出了许多在几何和力学上的应用. 我们将要叙述的头几个结果是在 1813 年的书中.

Dupin 的贡献之一叫做 Dupin 指标线, 它总结并澄清了 Euler 和 Meusnier 先前的结果. 给定了曲面在一点 M 的切平面, 他在切平面的每一个方向上从 M 开始划出一线段, 它的长等于曲面在该方向的法截线的曲率半径的平方根. 这些线段的端点的轨迹是一条圆锥曲线——指标线, 它给出曲面在 M 周围的形式的一个一阶近似 (因为它几乎相似于这曲面被 M 附近的一个平行于 M 点处切平面的平面所截出的截线). 曲面在一点的曲率线, 即曲面上通过 M 点的具有极(最大或最小)曲率的曲线, 是在 M 点以指标

线的轴线作为切线的曲线.

在三维直角坐标系中，坐标面是三族平面 $x=\text{const.}$, $y=\text{const.}$, 和 $z=\text{const}$. 假定有三族曲面，每一族都由 x, y 和 z 的一个方程给出. 如果一族中的每一曲面都和另两族的曲面正交，那么这三族曲面就叫做正交的. Dupin 在这方面的最突出的结果，写在他的《几何学的发展》中，就是如下的定理：三族正交曲面相互交截于每个曲面的曲率线(有最大或最小法曲率的曲线).

Dupin 还推广 Monge 关于线汇的结果. 如果线汇——双参数族——与一族曲面正交，就象在光学中，线是光线而曲面是波前，那么这线汇就叫做正交的. 法国物理学家 Etienne-Louis Malus (1775～1812) 显然利用了 Monge 的结果——虽然他没有引证这些结果——证明了(37)从一点(一个同心集)发出的法向线汇在曲面上反射或折射后(按照折射定律)仍然是一个法向线汇. 1816 年(38)Dupin 证明了，这一定理对于任何法向线汇经任意多次反射后仍然成立. 后来 Lambert A. J. Quetelet (1796～1874) 证明了法向线汇经任意多次折射后仍为法向线汇(39). 线汇和线丛，由 Malus 引进的依赖于三个参数的曲面族，是十九世纪许多数学家从事研究的课题.

8. 映射问题

十八世纪的微分几何很多是受大地测量和地图绘制问题推动的. 但是绘制地图的问题包含着推动数学进展的特殊考虑和困难，主要是出现在许多数学学科中的保角变换或保角映射的发展中的困难. 地图的绘制当然要比微分几何早得多，而映射的数学

(37) *Jour. de l'Ecole Poly.*, Cahier 14, 1808, 1～44, 84～129.

(38) *Annales de Chimie et de Physique*, 5, 1817, 85～88, 也在他的 1822 年的 *Applications* 中, 195～197.

(39) *Correspondance mathématique et physique*, 1, 1825, 147～149.

方法甚至还要早. 在这些映射方法中,球极平面射影和别的方法起源于 Ptolemy(第 7 章第 5 节),而 Mercator 射影要追溯到十六世纪(第 12 章第 2 节). 早在十八世纪之前人们可能已从直观上清楚不能把球面如实地映射到平面上,就是说,不能把球面映射到平面上而保持原来的长度.假如这样做是可能的话,那么所有的几何性质都会保持着. 只有可展曲面才能这样映射,而这种曲面,十八世纪的工作揭示了它们就是柱面(不必是圆柱面),锥面,以及任何由空间曲线的切线生成的曲面. 因球面到平面的映射不能保持全部几何性质,所以注意力便直接集中到保持角度的映射上去了.

在保持角度的映射中,如果在一个曲面上有两条曲线,交角为 α,而在另一曲面上,对应的两曲线的交角也是 α, 并设还保持角度的方向,那么这映射就叫做保角的. 球极平面射影和 Mercator 射影都是保角的. 保角性并不意味着两个对应的有限图形是相似的,因为角度的相等是在一点处成立的性质.

J. H. Lambert 在理论制图学方面开创了一个新纪元. 他是第一个以充分的一般性研究球面到平面的保角映射的人; 而且在 1772 年的书——《关于设计地图和天图的注记和附记》(*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land-und Himmelscharten*)中,他得到了这种映射的公式. Euler 在这方面也作出了许多贡献,而且事实上画了一幅俄国地图. Euler 在 1768 年提交圣彼得堡科学院的一篇论文中[(40)],利用复变函数,设计了一种从一个平面到另一平面的保角映射的表示方法. 但是他没有利用这种方法. 后来,在 1775 年提出的两篇论文中[(41)],他证明了球面不可能全等地映入平面. 这里他再一次用了复变函数而且讨论了相当一般的保角表示.他也给出了 Mercator 射影和球极平面射影的完整的分

(40) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14, 1769, 104～128, pub. 1770 = *Opera*, (1), 28, 99～119.

(41) *Acta Acad. Sci. Petrop.*, 1, 1777, 107～132 和 133～142, pub. 1778 = *Opera*, (1), 28, 248～275 和 276～287.

析. 1779年Lagrange[42]得到了地球表面的一部分映到一平面区域并且把纬圆和经圆都变为圆弧的全部保角变换.

在映射问题,特别是在保角映射方面的进一步发展,还有待于微分几何和复变函数论的发展.

参考书目

Ball, W. W. Rouse: "On Newton's Classification of Cubic Curves," *Proceedings of the London Mathematical Society*, 22, 1890, 104~143.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, reprint by Georg Olms, 1968.

Berzolari, Luigi: "Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven," *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903~1915, III, C4, 313~455.

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956, Chaps. 6~8.

Boyer, Carl B.: A History of Mathematics, John Wiley and Sons, 1968, Chaps. 20 and 21.

Brill, A., and Max Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen in älterer und neuerer Zeit," *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893, 107~156.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924; Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 3, 18~35, 748~829; Vol. 4, 375~388.

Chasles, M.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (1837), 3rd ed., Gauthier-Villars, 1889, pp. 142~252.

Coolidge, Julian L.: "The Beginnings of Analytic Geometry in Three Dimensions," *Amer. Math. Monthly*, 55, 1948, 76~86.

Coolidge, Julian L.: A History of Geometrical Methods, Dover (reprint), 1963, pp. 134~140, 318~346.

Coolidge, Julian L.: *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover (reprint), 1963, Chap. 12.

Coolidge, Julian L.: *A History of Conic Sections and Quadratic Surfaces*, Dover (reprint), 1968.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, Orell Füssli, Series 1, Vol. 6 (1921), Vols. 26~29 (1953~1956); Series 2, Vols. 3 and 4 (1948~1950), Vol. 9 (1968).

(42) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1779, 161~210, pub. 1781=*Œuvres*, 4, 637~692.

Huygens, Christian: *Horologium Oscillatorium* (1673), reprint by Dawsons, 1966; also in Huygens, *Œuvres Compètes*, 18, 27～438.

Hofmann, Jos. E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik," *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 61～171, 1956; published separately by Institut de Mathématiques, Geneva, 1957.

Kötter, Ernst: "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt," *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 5, Part II, 1896, 1～486; also as a book, B. G. Teubner, 1901.

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1867～1869, Vol. 1, 3～20; Vol. 3, 619～692.

Lambert, J. H.: *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land-und Himmelscharten* (1772), Ostwald's Klassiker No. 54, Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1896.

Loria, Gino: *Spezielle algebraische und tranzendente ebenen Kurven, Theorie und Geschichte*, 2 vols., 2nd ed., B. G. Teubner, 1910～1911.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques* (1802), Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, pp. 63～102.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics*, 1200～1800, Harvard University Press, 1969, pp. 168～178, 180～183, 263～269, 413～419.

Taton, René: *L'Œuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, 1951, Chap. 4.

Whiteside, Derek T.: "Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century," *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 1961, 179～388. See pp. 202～205 and 270～311.

Whiteside, Derek T.: *The Mathematical Works of Isaac Newton*, Johnson Reprint Corp., 1967, Vol. 2, 137～161. This contains Newton's *Enumeratio* in English.

24

十八世纪的变分法

> 因为宇宙的结构是最完善的而且是最明智的上帝的创造，因此，如果在宇宙里没有某种极大或极小的法则，那就根本不会发生任何事情。
>
> Leonhard Euler

1. 最初的问题

如同在级数和微分方程的领域里一样，变分法的早期工作几乎不能和微积分本身区分开来．但是在 1727 年 Newton 逝世之后几年内，很清楚，一个全新的具有自己的特征问题和方法论的数学分支已经产生了．这个新学科，对于数学和科学来说，其重要性几乎可以和微分方程相比，它为整个数学物理提供了一个最重要的原理．

为了获得变分法本质的某些初步概念，让我们来研究一下把数学家们引入变分法的那些问题．历史上第一个重要问题是由 Newton 提出并解决的．Newton 在他的«原理»第二册中，研究了物体在水中的运动；然后在第三版的命题 34 的附注中，他研究了在轴向以常速度运动而使运动阻力最小的旋转曲面必须具有的形状．Newton 假定物体表面任何一点上的流体阻力和垂直于物体表面的速度分量成正比．在«原理»中他只给出了所要曲面形状的几何特征，但是在他 1694 年大概是写给 David Gregory 的一封信中给出了他的解法．

写成现代的形式，Newton 的问题就是要选择适当的函数

$y(x)$，使得积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{y(x)[y'(x)]^3}{1+[y'(x)]^2}dx$$

取最小值，这里 $y(x)$ 表示绕 x 轴旋转生成曲面的曲线(图 24.1)。这个问题(以及一般说来变分法问题的)特有的特点在于它提出了一个积分，它的值依赖于被积函数中出现的未知函数，而且要确定这个未知函数使积分达到极大或极小.

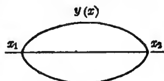


图 24.1

尽管 Newton 在解法中采用了引进子午线弧 $y(x)$ 的部分形状的改变这个想法——这几乎就是变分法的本质方法所包含的一切，但是 Newton 的方法不是变分法的典型技巧，所以这里不去深入研究. 重要的也许是：适合要求的 $y(x)$ 的参数方程是

$$x=\frac{c}{p}(1+p^2)^2,\quad y=a+c\left(-\log p+p^2+\frac{3}{4}p^4\right),$$

其中 p 是参数. 关于这个工作，Newton 说："我想可以把这个命题用到船舶的建造中去."这种性质的问题不仅在船舶设计中而且在潜水艇和飞机的设计中都已经变得很重要了.

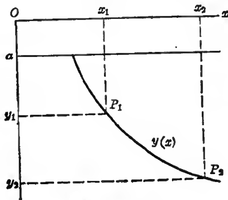


图 24.2

在 1696 年 6 月号的《教师学报》[1]上，作为向其他数学家的挑战，John Bernoulli 提出了现在著名的最速降线问题. 这个问题是求从一给定点到不是在它垂直下方的另一点的一条曲线，使得一质点沿这曲线从给定点下滑所用时间最短. 在 P_1 处的初速度 v_1 是给定的(图 24.2)；摩擦和空气阻力都忽略. 用现代的方式来

(1) Page 269 = *Opera*, 1, 161.

表达，这个问题就是要使表示下降时间的积分 J 取极小值，其中

$$J=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{\frac{1+[y'(x)]^2}{y(x)-\alpha}}\,dx.$$

这里 g 是重力加速度而 $\alpha=y_1-v_1^2/2g$. 这里仍然是选择被积函数中的 $y(x)$ 使得 J 取最小值. Galileo (1630 和 1638 年) 曾系统地表述而错误地解决过这个问题，他给出的答案是圆弧. 正确的答案是联结 P_1 和第二点 P_2 的上凹的唯一的旋轮线；母圆滚动的直线 l 必须在给定的下落初始点的上方正好在 $y=\alpha$ 的高度上. 于是有且只有一条旋轮线通过这两点.

Newton, Leibniz, L'Hospital, John Bernoulli 和他的哥哥 James 求得了正确的解答. 所有这些解法都发表在 1697 年 5 月号的《教师学报》上. Bernoulli 兄弟的解法值得进一步解释. John 的方法[2]是看出了最速下降路径是和光线在具有适当选择过的变折射率 $n(x, y)=c/\sqrt{y-\alpha}$ 的介质中所取的路径相同的. 在不同介质交界面处的折射定律(Snell 定律)是已知的；所以 John 把介质分成有限个数的层，从一层到另一层折射率有明显的变化，然后让层数趋于无穷. James 的方法[3]麻烦得多而且更为几何化. 但是 James 的方法也更一般化，而且是在变分方法的方向上迈出的一个较大的步伐.

通过 Huygens 和其他人关于钟摆问题的工作(第 23 章第 5 节)，旋轮线(cycloid)已经是众所周知的了. 当 Bernoulli 兄弟发现旋轮线也是最速降线问题的解时他们感到惊奇. John Bernoulli 说[4]："我们的确佩服 Huygens，因为他第一个发现一个重质点不论起点怎样，总以相同的时间描出一条旋轮线. 但是当我说正是这同一条旋轮线——Huygens 的等时曲线——就是我们正在寻求

(2) *Acta Erud.*, 1697, 206～211＝*Opera*, 1, 187～193.

(3) *Acta Erud.*, 1697, 211～217＝*Opera*, 2, 768～778.

(4) *Opera*, 1, 187～193.

的最速降线的时候，你们将感到惊奇."

另一类重要的问题是要求测地线，即曲面上两点间长度最短的路径. 如果曲面是平面，那么涉及的积分是

$$J=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx,$$

而且答案当然是一段直线. 十八世纪最使人感兴趣的测地线问题与地球表面上的最短路径有关，虽然数学家们相信地球表面是某种形状的椭球面，而且很象一个旋转椭球面，但是人们并不知道地球表面的确切形状. 早先提到的（第 23 章第 7 节）关于测地线的早期工作没有用到变分法，但是特殊的方法显然不足以解决一般的测地线问题.

在分析上，到现在为止提出的问题都属于形式

$$J=\int_{x_1}^{x_2}f(x,\ y,\ y')\,dx,$$

而且要寻求从(x_1, y_1)到$(x_2,\ y_2)$的 $y(x)$，使 J 达到极大或极小. 另一类问题，称为等周问题，在十七世纪末也进入到变分法的历史中来了. 这类问题的先驱——在给定周长的所有封闭平面曲线中求一条曲线，使得它所围的面积最大，——可以追溯到希腊以前的时代. 有一个故事说: 古代 Tyre 的 Phoeinician 城的公主 Dido 离开自己的家园定居在北非的地中海沿岸. 在那里她指望得到一些土地，并且同意付给一笔固定的金额来换取用一张公牛皮能围起来的土地. 精明的 Dido 把公牛皮切成非常细的条，把条和条的端点结起来再去围出一个面积，其周长正好等于这些牛皮条的总长. 而且她选的土地都是靠海的，所以沿海岸不用牛皮条. 根据传奇所载，Dido 决定牛皮的总长应围成一个半圆——围出最大面积的正确形状.

除了 Zenodorus 的工作以外（第 5 章第 7 节），直到十七世纪末，对等周问题实际上没有做什么工作. 在 1697 年 5 月的《教师

学报»[5]中，James Bernoulli 提出了一个包含几种情形的相当复杂的等周问题，向他弟弟挑战并使其弟弟为难．对于完满的解，James 甚至愿给 John 一笔五十个金币的奖金．John 给出了几种解法，其中之一是在 1701 年得到的[6]，但都是错误的．James 给出了一个正确的答案[7]．兄弟俩为各自解法的正确性而争论着．事实上，就象在最速降线中的情形一样，James 的方法是朝着不久就要形成的一般技巧前进的一个重大步骤． 1718 年 John[8] 大大地改进了他哥哥的解法．

分析地说，基本的等周问题是这样提出的．容许曲线用参数表示为

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

又因为它们都是闭曲线，故 $x(t_1)=x(t_2)$，$y(t_1)=y(t_2)$．而且曲线都不能自交．于是等周问题就是要求确定 $x(t)$ 和 $y(t)$，使得弧长

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

等于给定的常数而且使面积积分

$$J=\int_{t_1}^{t_2}(xy'-x'y)\,dt$$

取极大值．这种等周问题有两个新的特征．一是利用了参数表示，但这不是主要的．另一是出现了 L 必须等于常数这样一个辅助条件．

James 在 1697 年 5 月号的«学报»上提出了另一类问题：决定曲线的形状，使得一个质点从给定点 P_1 以给定的初速度 v_1 沿这曲线滑向一条直线 l 的任一点（图 24.3）时所化的滑动时间最小．

---

(5) Page 214.

(6) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1706, 235＝*Opera*, 1, 424.

(7) *Acta Erud.*, 1701,, 213 ff.＝*Opera*, 2, 897～920.

(8) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1718, 100 ff.＝*Opera*, 2, 235～269.

这个问题和前面的问题不同之处在于容许曲线不是从固定点伸向另一固定点，而是从一固定点到某条直线．由 James 在 1698 年的《学报》上给出的这个问题的答案（尽管 John 在 1697 年就有了这个解，但他没有发表）是一条与直线 l 正交的旋轮线弧．后来这个问题被推广为 l 是任意给定的曲线，给定点 P_1 改成给定的另一曲线，从而问题就是要决定从一条给定曲线上的某一点到另一条给定曲线上某点的一条路径，使质点沿这条路径滑动所需的时间最少．这类问题叫做“具有变动端点的问题”．

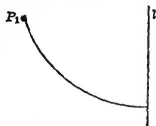


图 24.3

2. Euler 的早期工作

1728 年 John Bernoulli 向 Euler 提议利用测地线的密切平面与曲面正交（第 23 章第 7 节）这个性质来得到曲面上的测地线的问题．这个问题使 Euler 开始从事变分法的研究．1728 年他解决了这个问题[9]．1734 年 Euler 推广了最速降线问题，使得极小化的量不是时间而是别的量，并且考虑了阻尼介质[10]．

然后 Euler 着手寻找关于这种问题的更一般的方法．他的方法是 James Bernoulli 的方法的简化，用有限和代替问题中的积分，用差商代替被积函数中的导数，这样就把积分作成由弧 $y(x)$ 的有限个坐标构成的一个函数．然后 Euler 变动一个或几个任意选择的坐标，并计算积分中的变差．通过令积分的变差等于零并用一个粗糙的极限过程来变换所得到的差分方程；他就得到了极小化弧所必须满足的微分方程．

---

(9) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 3, 1728, 110～124, pub. 1732＝*Opera*, (1), 25, 1～12.
(10) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1734/1735, 135～149, pub. 1740＝*Opera*, (1), 25, 41～53.

把上述方法应用到如下形式的积分:

(1) $$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx,$$

Euler 成功地证明了使 J 取极大或极小值的函数 $y(x)$ 必须满足常微分方程

(2) $$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0.$$

这里的记号必须按如下意义去理解. 就 f_y 和 $f_{y'}$ 来说, 被积函数 $f(x, y, y')$ 是自变量 x, y 和 y' 的函数. 但是 $df_{y'}/dx$ 必须理解为 $f_{y'}$ 关于 x 的导数, 其中 $f_{y'}$ 通过 x, y 和 y' 依赖于 x. 就是说, Euler 的微分方程等价于

(3) $$f_y-f_{y'x}-f_{y'y}y'-f_{y'y'}y''=0.$$

因为 f 是已知的, 这个方程是关于 $y(x)$ 的二阶常微分方程, 一般说来还是非线性的. Euler 在 1736 年[11] 发表的这个有名的方程迄今仍是变分法的基本微分方程. 后面我们将会更清楚地看到, 它是极大化或极小化函数必须满足的必要条件.

然后 Euler 解决了包含特殊边界条件(如在等周问题中那样)的更难的问题, 但是他的方法仍然是去解微分方程(3), 以便先求得可能的极大化或极小化弧, 然后从(2)或(3)的通解中的常数个数去决定他能应用什么边界条件. 他解决的这些问题之一是由 Daniel Bernoulli 1742 年的一封信而引起他的注意的. Bernoulli 建议去找一根在两端受到压力作用的弹性杆的形状, 假定杆经弯曲后所取曲线的沿线曲率的平方, 即 $\int_0^L ds/R^2$, 达到极小, 其中 s 是弧长, R 是曲率半径. 这个条件相当于假定存贮在弯曲后的杆中的势能是最小的.

当极大化或极小化积分中的被积函数比 (1) 的被积函数更复

(11) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 159～190, pub. 1741=*Opera*, (1), 25, 54～80.

杂时，微分方程 (3) 不是正常的微分方程. 在 1736 年到 1744 年间，Euler 改进了他的方法，对大量的问题求得了类似于(3)的微分方程. 这些成果发表在 1744 年的一本书«寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧» (*Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*)[12] 中. Euler 在这本书中的工作是繁琐的，因为他用了几何考虑，逐次差商，与级数，还把导数变成差商，积分变成有限和. 换句话说，他在最有效地利用微积分方面是失败了. 但是 Euler 以应用极为广泛的简单而又漂亮的公式结束他的书；而且，他处理了大量的例子，来证明他的方法的方便和一般性. 其中一个例子是处理极小旋转曲面. 这问题是：决定位于(x_0, y_0)和(x_1, y_1)间的平面曲线 $y=f(x)$，使得它绕 x 轴旋转所生成的曲面面积为最小. 要求最小值的积分是

$$A=\int_{x_0}^{x_1} 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{4}$$

Euler 证明了函数 $f(x)$ 必须是悬链线的一个弧段；这样生成的曲面叫悬链面. 在 Euler 1744 年书的一个附录中，Euler 还给出了上面说过的弹性杆问题的一个确定的解. 他不仅推导出杆的形状取椭圆积分的形式，而且还给出了不同类型端点条件的解. 这本书立即给他带来了声誉，把他看作是当时活着的最伟大的数学家.

随着 Euler 这本书的出版，变分法作为一个新的数学分支诞生了. 但是广泛使用的是几何的论证，把几何和分析结合起来的论证不仅是复杂的，而且几乎不能提供一个系统的一般方法. Euler 是充分意识到这种限制的.

3. 最小作用原理

正当变分问题的解取得进展的时候，物理学给这一课题的工

(12) *Opera*, (1), 24.

作直接提供了一个新的推动力. 同时代的发展是最小作用原理. 为了说明这个原理的基础, 我们必须往回追溯一下. Euclid 在他的《反射光学》(*Catoptrica*)(第 7 章第 7 节)中已经证明,光线从 P 点到镜面然后到 Q 点所取的路径是使 $\angle 1=\angle 2$(图 24.4). 后来 Alexandria 城的 Heron 证明了光线实际取的路径 PRQ 比任何一个能够想象的路径,譬如 $PR'Q$, 都要短. 因为光线取最短的路径, 如果在直线 RR' 上方的介质是均匀的, 那么光线就以常速行进, 从而取化时最少的路径. Heron 把这个最短路径和最少时间原理应用到了凹和凸的球面镜的反射问题上去.

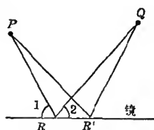


图 24.4

根据这种反射现象,还根据哲学,神学,和审美的原则,在希腊时代以后的哲学家和科学家们提出了一种学说, 就是大自然以最短捷的可能途径行动, 或者如 Olympiodorus(公元 6 世纪)在他的《反射光学》中所说的:“自然不做任何多余的事或者任何不必要的工作.” Leonardo da Vinci 说,自然是经济的,并且自然的经济是定量的, 而 Robert Grosseteste 相信, 自然总是以数学上最短和最好可能的方式行动. 在中世纪时代, 自然是以这一方式行动的观点是普遍地为人们所接受的.

十七世纪的科学家至少是容易接受这种观念的, 但是, 作为科学家, 他们企图把这种观念和支持这种观念的现象联系起来. Fermat 知道反射时光线取需时最少的路径,而且相信自然确实是简单而又经济地行动的, 在 1657 年和 1662 年的信件中(13), 他确认了他的最小时间原理,这个原理说,光线永远取化时最少的路径行进. 他曾经怀疑过光的折射定律的正确性(第 15 章第 4 节),但是当他在 1661 年(14) 发现他能够从他的原理导出光的折射定律

(13) *Œuvres*, 2, 354～359, 457～463.
(14) *Œuvres*, 2, 457～463.

时，他不但解除了对折射定律的怀疑，而且更加确信他的原理是正确的了.

Fermat 的原理在数学上有几种等价的陈述形式. 按照折射定律

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{v_1}{v_2},$$

其中 v_1 是光在第一介质中的速度，v_2 是光在第二介质中的速度. 常用 n 表示 v_1 对 v_2 之比，叫做第二种介质相对于第一种介质的折射率；如果第一种介质是真空，则 n 叫做非真空介质的绝对折射率. 如果 c 表示光在真空中的速度，那么绝对折射率 $n=c/v$，其中 v 是光在介质中的速度. 如果介质的特性是逐点变化的，则 n 和 v 都是 x, y 和 z 的函数. 因此光线沿着曲线 $x(\sigma)$, $y(\sigma)$, $z(\sigma)$ 从点 P_1 行进到 P_2 所需要的时间为

$$(5)\quad J=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{ds}{v}=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{n}{c}ds=\frac{1}{c}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}n(x,\ y,\ z)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,d\sigma,$$

其中 σ_1 是 σ 在 P_1 的值而 σ_2 是 σ 在 P_2 的值. 因此 Fermat 原理说：光线从 P_1 行进到 P_2 所取的实际路径是使 J 取极小的曲线[15].

大约在十八世纪初期，数学家们已经有了几个给人印象深刻的例子，说明自然的确试图使某些重要的量极大或极小化. 最初曾经反对过 Fermat 原理的 Huygens 证明了，光线在具有变折射率的介质中传播时 Fermat 原理也是成立的. 甚至 Newton 的第一运动定律（该定律说直线或最短距离的运动是物体的自然运动）也表明自然界的欲望是要求经济化. 这些例子暗示着可能存在某种更一般的原理.

当 Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698～1759) 于 1744

(15) 有一些例子，例如光线从凹镜的反射，这时光线所取路径需要极大的时间. 这个事实为 Fermat 所知，并由 William R. Hamilton 明确叙述过.

年在光的理论方面进行工作时，他在一篇题为«直到现在看起来还是不能并存的不同法则的协调性» (Accord des différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles)[16] 中提出了他的著名的最小作用原理. 他从 Fermat 原理出发，但是由于那时候对光速究竟是象 Descartes 和 Newton 所相信的那样和折射率成正比，还是象 Fermat 所相信的那样和折射率成反比，有不同意见，所以 Maupertuis 放弃了最小时间. 事实上他不相信最小时间总是正确的.

Maupertuis 说，作用是质量、速度和所经距离的乘积的积分，自然界中的任何改变都是要使作用最小. Maupertuis 多少有点糊涂，因为他没有规定 m, v 和 s 的乘积是在什么时间区间上取的，又因为他在光学和某些力学问题的每个应用中对作用赋以不同的意义.

尽管 Maupertuis 有一些物理方面的例子支持他的原理，但是他提倡这个原理还是出于宗教的原因. 物质行为的各种规律必须具有上帝创造的完美性；而最小作用原理看起来好象满足这个准则，因为这个原理表明自然界是经济的. Maupertuis 宣称他的原理是自然界的普遍规律和上帝存在的第一个科学证明. Euler 在 1740 和 1744 年间曾在这一课题方面同 Maupertuis 通过信，同意 Maupertuis 的观点：上帝一定已经按照某种这样的基本原理构造了宇宙，而这种原理的存在就证实了上帝的安排.

Euler 在他 1744 年的书的第二个附录中把最小作用原理作为一个精确的动力学定理作了详细的阐述. 他只限于讨论单个质点沿平面曲线的运动. 此外，他假定速度依赖于位置，或者用现代的术语来说，力可以从位势导出. 然而 Maupertuis 写为

$$mvs = \min.,$$

而 Euler 则写作

(16) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1744.

$$\partial\int v\,ds=0,$$

意思是对于路径改变的积分，它的变化率必须为零. 因为 $ds=v\,dt$, Euler 还写下

$$\partial\int v^2\,dt=0.$$

这里，Euler 即使应用他的变分法技巧正确地把这个原理用于特殊问题，但是恰恰在积分的变化率是什么意思的问题上他是模糊的. 至少 Euler 证明了对于沿着平面曲线的运动，Maupertuis 的作用是最小的.

在相信一切自然现象都是为了使某个函数达到极大或极小，因而基本的物理原理应该表达某个函数被极大化或极小化这一点上，Euler 比 Maupertuis 走得更远. 特别是在研究物体在力的推动下的运动的动力学中这种原理应该是正确的. Euler 离开真理并不太远.

4. Lagrange 的方法论

Euler 的工作引起了 Lagrange 的注意. Lagrange 自己在 1750 年还只十九岁的时候就开始关心变分法的问题. 他放弃了 Bernoulli 兄弟和 Euler 的几何-分析的论证，引进了纯分析的方法. 1755 年他得到了一个一般的方法，对于范围很广的一类问题，这方法是系统而统一的，他为这方法工作了若干年. 他关于这一课题的著名出版物是《论确定不定积分公式的极大和极小的一个新方法》(Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies)[17]. 在 1755 年 8 月给 Euler 的一封信中 Lagrange 讲了这个方法，他称之为变分

(17) *Misc. Taur.*, 2, 1760/1761, 173～195, pub. 1762＝*Œuvres*, 1, 333～362.

方法(the method of variation)，但是 Euler 在 1756 年提交给柏林科学院的一篇论文[18]中把这种方法命名为变分法(the calculus of variation).

我们来解释一下变分法基本问题的 Lagrange 方法，问题就是使积分

(6) $$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx$$

极大或极小化，其中 $y(x)$ 是待定的. Lagrange 的一个改革是引进通过端点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 的新曲线而不是去改变极大或极小化曲线的个别的坐标. Lagrange 把这些新的曲线表为形式 $y(x)+\delta y(x)$，δ 是 Lagrange 引进的一个特殊符号，用来表示整个曲线 $y(x)$ 的变分. 在(6)的被积函数中引进了一条新的曲线当然就改变了 J 的值. 因此 J 的增量，我们记为 ΔJ，是

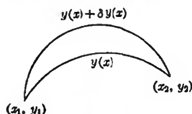


图 24.5

$$\Delta J=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, y+\delta y, y'+\delta y')-f(x, y, y')\}\,dx.$$

现在 Lagrange 把 f 看作是三个自变量的函数，但因 x 是不变的，所以对一个双变量函数应用 Taylor 定理就能把被积函数展开. 展开式给出 δy 和 $\delta y'$ 的一次项，这些增量的二次项，等等. 于是 Lagrange 写下

(7) $$\Delta J=\delta J+\frac{1}{2}\,\delta^2 J+\frac{1}{3!}\,\delta^3 J+\cdots,$$

其中 δJ 表示 δy 和 $\delta y'$ 的一次项的积分，$\delta^2 J$ 表示二次项的积分，等等. 这样就有

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}(f_y\delta y+f_{y'}\delta y')\,dx,$$

(18) “变分计算初步” (Elementa Calculi Variationum), *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1764, 51～93, pub. 1766=*Opera*, (1), 25, 141～176.

$$\delta^2 J=\int_{x_1}^{x_2}\{f_{yy}(\delta y)^2+2f_{yy'}(\delta y)(\delta y')+f_{y'y'}(\delta y')^2\}dx.$$

δJ 叫做 J 的一次变分；$\delta^2 J$ 叫 J 的二次变分；等等.

Lagrange 接着论证道，因为 δJ 中包含小的变分 δy 和 $\delta y'$ 的一阶项，所以 δJ 的值控制了(7)的右端，从而当 δJ 是正或负时，ΔJ 将是正或负的. 但是在 J 的极大值或极小值处，和单变量函数 $f(x)$ 通常的极大或极小的情形一样，ΔJ 必须有相同的符号，所以对于极大化函数 $y(x)$，δJ 一定等于 0. 此外，Lagrange 说

$$\delta y'=\frac{d(\delta y)}{dx}; \tag{8}$$

即，运算 d 和 δ 的次序可以交换. 这是正确的，虽然对于 Lagrange 的同辈人来说理由是不清楚的，后来 Euler 阐明了理由. [容易看出这是正确的，因为如果我们把 $y+\delta y$ 写作 $y+n(x)$，其中 $n(x)$ 是 $y(x)$ 的变分，那么 $\delta y=y+n(x)-y=n(x)$，而且 $\delta y'=y'+n'(x)-y'=n'(x)$，但 $n'(x)=\frac{dn(x)}{dx}=\frac{d(\delta y)}{dx}$.] 利用(8)，Lagrange 把一次变分写成

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[f_y\delta y+f_{y'}\frac{d}{dx}(\delta y)\right]dx.$$

对第二项分部积分并且利用 δy 在 x_1 和 x_2 处必须等于 0 这一事实，就得到

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left(f_y\delta y-\left(\frac{d}{dx}f_{y'}\right)\delta y\right)dx. \tag{9}$$

现在对一切变分 δy，δJ 都必须为 0. 因此 Lagrange 下结论说：δy 的系数必须为 0[19]，或即

$$f_y-\frac{d}{dx}(f_{y'})=0. \tag{10}$$

(19) 在 Lagrange 的工作之后的一百年里，δy 的系数必须等于 0 这件事实一直为这方面的每一位作者直观地接受或者错误地证明过. 甚至 Cauchy 的证明也是不充分的. 第一个正确的证明是由 Pierre Frédéric Sarrus (1789～1861) 给出的 (*Mém. divers Savans*, (2), 10, 1848, 1～128).这个结果就是现在众所周知的变分法基本引理.

这样，Lagrange 达到了 Euler 曾经得到的 $y(x)$ 的同一个常微分方程．Lagrange 推导(10)的方法(除去他用了微分外)，甚至他的记号，至今还在使用．当然，(10)是关于 $y(x)$ 的必要条件而不是充分条件．

Lagrange 在 1760/1761 年的这篇论文中还第一次推导出具有变动端点问题的极小化曲线必须满足的端点条件．他还找到了在极小化曲线和固定曲线或曲面的交点处必须成立的横截性条件，比较曲线的端点容许在这些固定的曲线或曲面上变动(图 24.6)．



图 24.6

虽然关于形式 (6) 的极大或极小化积分还有很多东西要说，但是就历史而言，Lagrange 采取的第二步是在他 1760/1761 年这篇论文和以后的一篇论文[20]中所研究的导致重积分的问题．需要极大化或极小化的积分具有形式

$$J=\iint f(x,\ y,\ z,\ p,\ q)\,dx\,dy, \tag{11}$$

其中 z 是 x, y 的函数，$p=\partial z/\partial x$, $q=\partial z/\partial y$. 积分展布在 xy 平面的某个区域上．于是问题就是要求使 J 的值达到极大或极小的函数 $z(x,\ y)$．在这类重积分的许多问题中最重要的一个是在边界以某种方式固定的所有曲面中求面积最小的曲面．譬如可以假定在空间给出两条不自交的闭曲线，然后求由这两条曲线界住的面积最小的曲面．作为极小曲面问题的一个特殊情形，这两条曲线可以是平行于 yz 平面而中心在 x 轴上的圆周(图

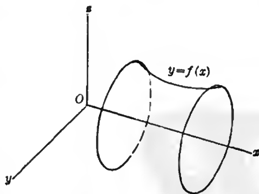


图 24.7

(20) *Misc. Taur.*, 4, 1766/1769 = *Œuvres*, 2, 37～63.

24.7). 那么可能的极小曲面一定是由这两个圆周界住的旋转曲面，而问题就是求使面积最小的旋转曲面. 这后一个问题，正如上文已指出的，是早已由 Euler 在 1744 年解决了的. 但是旋转曲面的这一特殊情形，可以采用适合于积分(11)的理论来处理.

Lagrange 按照他对较简单的积分(6)曾经用过的类似方法，得到了使(11)取极小的函数 $z(x, y)$ 必须满足的微分方程. 如果采用通常的记号

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

那么方程是

$$Rr+Ss+Tt=U, \tag{12}$$

其中 R, S, T 和 U 都是 x, y, z, p 和 q 的函数. 这个非线性二阶偏微分方程，称为 Monge 方程，是不容易求解的；这种形式的方程曾经是 Euler 以前时代的研究课题(第 22 章第 7 节).

在极小曲面问题的情形中，积分(11)变成

$$\iint (1+p^2+q^2)^{1/2} dx\, dy, \tag{13}$$

而且，对于这类特殊问题，偏微分方程(12)变成

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0. \tag{14}$$

这个方程是由 Lagrange 在他 1760/1761 年的论文中给出的(虽然不完全是这种形式)而且是极小曲面理论的一个主要的分析结果. 几何上，如 Meusnier 在 1785 年的一篇论文[21]中指出的，这个偏微分方程表示如下事实：在极小化曲面的任一点上，主曲率半径是相等而反向的，或说平均曲率，即主曲率的平均值，为零.

Lagrange 在后来(1770 年)的一篇论文[22]中还研究了被积函数中有高阶导数的单重和多重积分. 这个课题自 Lagrange 时代之后得到很好的发展，现在是变分法的标准内容. 但是，因为它的

(21) *Mém. divers Savans*, 10, 1785, 477～485.

(22) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1770=*Œuvres*, 3, 157～186.

原理和已经讨论过的原理没有什么差别，所以这里就不深入讨论了．Lagrange 关于变分法的论文的内容编进了他的《分析力学》中．

变分法并没有很好地为 Lagrange 和 Euler 的同辈人理解．Euler 在许多著作中阐明了 Lagrange 的方法，并用这个方法重新证明了几个老的结果．虽然他认识到变分法是一个新的分支，或者如他所说，是用新的运算符 δ 进行符号化了的新的技巧，但他象 Lagrange 一样，试图在普通微积分的基础上建立变分法的逻辑．Euler 的思想(23)是引进一个参数 t，使得变分问题中的曲线族随着 t 而变化，即对于某个区间中的每个 t，应该有一条曲线 $y_t(x)$．然后 Euler 就说 $dy=(dy/dx)dx$，$\delta y=(dy/dt)dt$．因此变分 δy 表成了关于 t 的偏微商．然后他用这个关于 t 的微商的新概念确切陈述了变分法的技巧．当然他最终得到的结果和早先得到的结果是相同的．

Euler继续研究具有极大或极小性质的空间曲线(1779年)(24)，而且研究了在三维空间中有外力(在通常的问题中是重力)作用时或存在阻尼介质时最速降线问题的推广 (1780 年)(25)．

5．Lagrange 和最小作用

Lagrange 把变分法用到了动力学上．他从 Euler 那里接过最小作用原理，成了第一个用具体形式把这个原理表示出来的人，这种具体形式就是对于单个质点而言，质量，速度和两个固定点之间的距离的乘积的积分是一个极大值或极小值的原理；即，对于这

(23) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 16, 1771, 35～70, pub. 1772＝*Opera*, (1), 25, 208～235.

(24) *Mém. de l'Acad. des Sci. de St. Peters.*, 4, 1811, 18～42, pub. 1813＝*Opera*, (1), 25, 293～313.

(25) *Mém. de l'Acad. des Sci. de St. Peters.*, 8, 1817/1818, 17～45, pub. 1822＝*Opera*, (1), 25, 314～342.

个质点所取的实际路径而言，$\int mv\,ds$ 必须是极大或极小. 换句话说，因为 $ds=v\,dt$，那么 $\int mv^2\,dt$ 必须是极大或极小. 量 mv^2[今天的 $\frac{1}{2}mv^2$]叫做动能；在 Lagrange 时代叫做活力. Lagrange 还断言，对于质点组而言这个原理也是正确的，甚至对广义质量也是对的，虽然他对于广义质量的情形并不清楚.

利用最小作用原理和变分法的方法，Lagrange 得到了他的著名的运动方程. 我们来考虑动能是 x, y 和 z 的函数的情形. 于是，对于单个质点，动能 T 是

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2). \tag{15}$$

Lagrange 还假定使物体运动的作用力都可从一个依赖于 x, y 和 z 的势函数 V 推导出来. 于是附加的一个条件是 $T+V=\text{const.}$，即，总能量是不变的. Lagrange 的作用是

$$\int_{t_0}^{t_1} T\,dt, \tag{16}$$

他的最小作用原理说的是，这个作用必须是一个极小值或极大值，也就是

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} T\,dt=0. \tag{17}$$

在一个极小化或极大化的作用中，即使运动是在空间的两个固定点间和两个确定的时刻 t_0 和 t_1 之间发生，空间和时间变量也一定是变化的.

把变分法的方法用到作用积分上，Lagrange 导出了与 Euler 方程(2)类似的方程，即

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)+\frac{\partial V}{\partial x}=0 \tag{18}$$

以及关于 y 和 z 的两个相应的方程，这些方程都等价于 Newton 第二运动定律.

Lagrange 进一步引进了现在所谓的广义坐标．就是说，可以用极坐标或者用实际上为了确定质点(或广义质量)位置所必需的任何坐标组 q_1，q_2，q_3 来代替直角坐标．于是

$$x=x(q_1,\ q_2,\ q_3),$$
$$y=y(q_1,\ q_2,\ q_3),$$
$$z=z(q_1,\ q_2,\ q_3),$$

其中 q_i 都是 t 的函数，用新的坐标来表示，T 就成为 q_i 和 $\dot{q}_i$ 的函数，而 V 成为 q_i 的函数，于是方程(18)变成

$$(19)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

这是关于 q_i 的三个二阶常微分方程的联立方程组．它们都是作用积分的 Euler (特征)方程．如果确定运动物体的位置需用 n 个坐标，例如两个质点需用 6 个坐标，那么方程组 (19) 就有 n 个方程[26]．

这些广义坐标不一定要有几何或物理意义．今天这些坐标都看作是构形空间的坐标，从而 $q_i(t)$ 就是构形空间中一条路径的方程．因此 Lagrange 已经认识到变分原理，即作用必须是极小或极大的原理，可以使用任何坐标组，而且认识到相对于任何坐标变换，Lagrange 运动方程(19)的形式是不变的．

虽然 Lagrange 原理相当于 Newton 第二运动定律，但是 Lagrange 原理比 Newton 第二运动定律的陈述有几个优点．首先，任何一种方便的坐标系，都可以说已被纳入 Lagrange 原理的结构中．第二，处理有约束的运动问题更容易了．第三，代替一系列分立的微分方程(当系统包含很多质点时，这种方程可以有很

(26) Lagrange 明白，T 和 V 中变量的数目正好是决定该力学系统的位置所需要变量的数目．因此如果有 N 个互相无关的质点，每一个质点在空间的路径需用三个坐标(x_i,y_i,z_i)来描述，那么共需要 $3N$ 个坐标．这时将有 $3N$ 个坐标 q_i，$3N$ 个把 q_i 与直角坐标联系起来的方程，$3N$ 个形为(19)的方程．互相独立的坐标的数目或者象物理学家所谓的自由度的数目，依赖于所要讨论的系统和运动中的约束．

多个)，现在有了，至少是开始有了一个原理，由它可以求得微分方程. 最后一点，虽然 Lagrange 原理要假定问题的动能和势能的情况，但并不需要知道作用力. Lagrange 用他的原理推出了力学的主要定律，并解决了一些新的问题，尽管这些还不足以包括力学所涉及到的所有问题. Lagrange 关于作用原理的工作在他的«分析力学»中有充分的阐述. 他还开始了从变分原理推出其他物理分支的定律的运动，而这种变分原理应该是最小作用原理的类似物. 他本人对广泛的一类流体动力学问题给出了一种变分原理. 在研究十九世纪的变分法时我们将继续讲述有关这方面的内容.

从数学的观点说来，Lagrange 关于最小作用的工作赋予变分法以重大的价值. 特别是 Lagrange 曾对被积函数包含一个自变量但有几个应变量及其导数的积分导出了 Euler 方程. 这是原来变分法问题的一种推广，原来变分问题的积分中只包含一个应变量及其导数. 在这种推广中，Euler 方程是 q_i 的二阶常微分方程组.

6. 二次变分

正如 Euler 和 Lagrange 意识到的，Euler 微分方程只是使积分取极大或极小的解所应满足的一个必要条件. 他们用微分方程来求解，然后凭借直观或物理背景来决定这个解是否提供一个极大或极小. Euler 方程的作用完全类似于普通微积分中的条件 $f'(x)=0$. 使 $y=f(x)$ 取极大或极小的 x 值一定满足 $f'(x)=0$，但反过来不一定对.

Euler 方程的解必须满足什么样的附加条件才能真正使一个依赖于 $y(x)$ 的积分取到极大或极小，这个问题 Laplace 在 1782 年曾经处理过，但没有成功. 以后 Legendre 在 1786 年着手解决这

个问题[27]．在普通微积分中，在使$f'(x)=0$的x值处，$f''(x)$的符号决定着$f(x)$是否取极大或极小．正是以这个事实为指导，Legendre研究了二次变分$\delta^2 J$，重新改造了二次变分的形式，并且得到结论说：对于满足Euler方程并且通过(x_0, y_0)和(x_1, y_1)的曲线$y(x)$，只要沿$y(x)$的每一点x处$f_{y'y'}\leqslant 0$，则J取极大；类似地，对于同样的曲线$y(x)$，只要沿$y(x)$的每一点x处$f_{y'y'}\geqslant 0$，则J取极小．然后Legendre把这个结果推广到比(6)更一般的积分上去．但是，Legendre在1787年认识到，关于$f_{y'y'}$的条件仅仅是使$y(x)$成为极大或极小曲线的一个必要条件．寻求使(6)的积分达到极大或极小的曲线$y(x)$的充分条件的问题，在十八世纪没有得到解决．

参考书目

Bernoulli, James: *Opera*, 2 vols., 1744, reprint by Birkhaüser, 1968.

Bernoulli, John: *Opera Omnia*, 4 vols., 1742, Georg Olms (reprint), 1968.

Bliss, Gilbert A.: *The Calculus of Variations*, Open Court, 1925.

Bliss, Gilbert A.: "The Evolution of Problems in the Calculus of Variations," *Amer. Math. Monthly*, 43, 1936, 598～609.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924, Vol. 3, Chap. 117, and Vol. 4, 1066～1074.

Caratheodory, C.: Introduction to Series (1), Vol. 24 of Euler's *Opera Omnia*, viii～lxii, Orell Füssli, 1952. Also in C. Carathéodory: *Gesammelte mathematische Schriften*, C. H. Beck, 1957, Vol. 5, pp. 107～174.

Darboux, Gaston: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2nd ed., Gauthier-Villars, 1914, Vol. 1, Book III, Chaps. 1～2.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 24～25, Orell Füssli, 1952.

Hofmann, Joseph E.: "Über Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik," *L'Enseignement Mathématique*, (2), 2, 1956, 61～171; published separately by Institut de mathématiques, Geneva, 1957.

Huke, Aline: *An Historical and Critical Study of the Fundamental Lemma in the Calculus of Variations*, University of Chicago Contributions to the Calculus of

(27) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1786, 7～37, pub. 1788.

Variations, University of Chicago Press, Vol, 1, 1930, pp. 45～160.

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, 1867～1869, relevant papers in Vols. 1～3.

Lagrange, Joseph-Louis: *Mécanique analytique*, 2 vols., 4th ed., Gauthier-Villars, 1889.

Lecat, Maurice: *Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à* 1850, Gand, 1916.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, 1802, Albert Blanchard (reprint), 1960, Vol. 3, 643～658.

Porter, Thomas Isaac: "A History of the Classical Isoperimetric Problem," *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations*, University of Chicago Press, 1933, Vol. 2, pp. 475～517.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, pp. 644 ～655.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics*, 1200～1800, Harvard University Press, 1969, pp. 391～413.

Todhunter, Isaac: *A History of the Calculus of Variations during the Nineteenth Century*, 1861, Chelsea (reprint), 1962.

Woodhouse, Robert: *A History of the Calculus of Variations in the Eighteenth Century*, 1810, Chelsea (reprint), 1964.

25

十八世纪的代数

我介绍高等分析的时候，它还是个孩子，而你正在把它带大成人。

John Bernoulli，给 Euler 的一封信

1. 数系的状况

虽然在十八世纪时很难把代数和分析互相区别开来，因为极限概念的深刻含义在当时依然是模糊的，但是按照我们现代的观点，把这两个活动领域分开还是合适的．十七世纪的时候，代数是人们兴趣的一个重要中心；但到了十八世纪，它变成从属于分析，而且除了数论以外，促进代数研究的因素，大部分来自分析．

因为代数的基础是数系，所以让我们先来看一下数系发展的状况．在 1700 年左右，我们所熟悉的数系的所有成员——整数，分数，无理数，负数和复数——都已被人们熟知了．但是，在整个这世纪中，都有人反对更新类型的数．典型的是英国数学家 Baron Francis Masères (1731～1824)的反对意见，他是剑桥大学克莱尔(Clare) 学院的研究员和皇家学会会员．正是这位写过一些有价值的数学论文和有关人寿保险理论的实质性论文的 Masères，在 1759 年发表了«专论在代数中使用负号» (*Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra*)．他说明如何避开负数(除了要表示从较小的数减去较大的数所得的差以外)，尤其是避开方程的负根，他把二次方程仔细分类，使得有负根的方程单独进行考虑；当然，负根必须舍去．对于三次方程他也同样处理．然后他说到

负根：

> ……就我所能判断的而言，它们只会把方程的整个理论搞糊涂，而且把一些就其本质说来是出奇地明显简单的东西搞得晦涩难懂、玄妙莫测…….因此很希望代数里决不容许有负根，或者说再一次把它们从代数里驱逐出去；因为如果这样做了，那么就有很好的理由去设想，那些现在被许多知识渊博、机敏过人的人用来进行代数运算的、模糊不清并和一些几乎是不能理解的概念纠缠在一起的东西，从此将从代数中清除掉；一定会使代数(或普遍的算术)，就其本性而言，在简洁明了和证明能力方面，成为不亚于几何的一门科学.

确实的，直到现代，负数才算被真正透彻地理解了. 在十八世纪后半叶，Euler 仍然深信负数比∞大. 他还论证 $(-1)\cdot(-1)=+1$ 说，因为这个乘积必定是 $+1$ 或者 -1，但因为 $1\cdot(-1)=-1$，所以 $(-1)\cdot(-1)=+1$. 著名的法国几何学家 Carnot 认为，负数的使用导致谬误的结论. 在 1831 年这样晚的时候，伦敦大学大学院的数学教授，著名的数理逻辑学家，并对代数有贡献的 Augustus De Morgan (1806～1871) 在他的《论数学的研究和困难》(*On the Study and Difficulties of Mathematics*) 中说："虚数式 $\sqrt{-a}$ 和负数式 $-b$ 有一种相似之处，即只要它们中的任一个作为问题的解出现，就说明一定有某种矛盾或谬误. 只要一涉及到实际的含义，二者都是同样的虚构，因为 $0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 同样是不可思议的."

De Morgan 举一个问题来解释他的话. 父亲 56 岁，他的儿子 29 岁；问什么时候，父亲的岁数将是儿子的 2 倍？他解方程 $56+x=2(29+x)$，得 $x=-2$. 因此他说，这个结果是荒唐的. 接着他又说，但是，如果把 x 换成 $-x$，解方程 $56-x=2(29-x)$，我们就

得到$x=2$．他总结道，由于最初问题的提法是错误的，所以导致不能接受的负答数．De Morgan 固执地认为考虑比 0 小的数是荒谬的．

十八世纪时，虽然在弄清楚无理数概念方面没有什么成就，但是对无理数本身还是作出了某些进展．1737 年 Euler 基本上证明了 e 和 e^2 是无理数，Lambert 证明了 π 是无理数(第 20 章第 6 节)．由于要求圆的面积，大大地刺激了对 π 的无理性的研究．Legendre 猜测说 π 可能不是有理系数方程的根，他的猜测导致了无理数的分类．任何有理系数代数 (多项式) 方程的任何一个根(不管是实的还是复的)叫做一个代数数．这样，方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根叫做代数数，其中 a_i 是有理数．因此，所有的有理数和一部分无理数是代数数，这是因为，任一有理数 c 是方程 $x-c=0$ 的根，而 $\sqrt{2}$ 是 $x^2-2=0$ 的根．不是代数数的数叫做超越数，因为 Euler 说过，"它们超越了代数方法的能力．" Euler 至少早在 1744 年就认识到了代数数与超越数之间的这一差别．他猜测说，以有理数为底的有理数的对数，必定或者是有理数，或者是超越数．然而，十八世纪时还不知道有哪一个数是超越数，因而证明超越数存在的问题仍旧没有解决．

对于十八世纪的数学家来说，复数更是一个祸根．这些数自从被 Cardan 引进之后，直到 1700 年实际上还无人理睬．后来(第 19 章第 3 节) 用部分分式法求积分时用到了复数，随之就产生了关于复数以及负数和复数的对数的冗长的论争．尽管 Euler 正确地解决了复数的对数问题，但是无论是他还是别的数学家，对这些数都是不清楚的．

Euler 试图理解复数究竟是什么，在他的《对代数的完整的介绍》(*Vollständige Anleitung zur Algebra*，这本书 1768～1769 年在俄国第一次出版，1700 年在德国出版，是十八世纪最好的一本代

数教科书)中说:

> 因为所有可以想象的数都或者比 0 大,或者比 0 小,或者等于 0,所以很清楚,负数的平方根不能包括在可能的数[实数]中. 从而我们必须说它们是不可能的数. 然而这种情况使我们得到这样一种数的概念,它们就其本性说来是不可能的数,因而通常叫做虚数或者幻想中的数,因为它们只存在于想象之中.

Euler 在使用复数时犯了错误. 在这本《代数》中他写道: $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}=2$, 因为 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. 他还给出 $i^i=0.2078795763$,但遗漏了这个量的其他数值. 他最初是在 1746 年给 Goldbach 的一封信中,而后在 1749 年一篇谈 Leibniz 和 John Bernoulli 之间争吵的文章中(第 19 章第 3 节)给出了这个数值. 虽然 Euler 把复数叫做不可能的数,但他说它们是有用的. 他心目中的用处发生在当我们着手处理一个不知道是否有解的问题的时候. 例如,如果要把 12 分成两部分,使它们的乘积等于 40,我们就会得到这两部分是 $6+\sqrt{-4}$ 和 $6-\sqrt{-4}$. 他说,从而我们认识到这个问题是不能解出的.

除了 Euler 作出的关于复数的对数的正确结论以外,复数的研究确实前进了几步,但是它们在十八世纪的影响是有限的. 在 John Wallis 的书《代数》(1685, 第 66~69 章)中,他说明怎样几何地表示实系数二次方程的复根. Wallis 说,实际上,复数并不比负数更不合理,而且因为负数能在直线上表示出来,所以在平面上表示复数也应该是可能的. 他从画一条轴出发,根据一个实数与原点的关系在轴上把这个实数标出来; 在这条轴上到原点的距离表示根的实部,根据实部的正或负,这个距离分别在轴的正方向或负方向上量出来. 过实轴上这样定出的这一点,作一条垂直于实轴的直线,它的长度就表示与 $\sqrt{-1}$ 相乘的那个数,即给出了根的

虚部，这条直线根据这个数的正负分别在不同的方向画出．(他没有引进 y 轴本身作为虚轴．) 接着，Wallis 作出了方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根都是实根和都是复根时的几何图象． 他的这项工作是正确的，但是对于其他用途来说，它不是 $x+iy$ 的一个有用的表示形式． 十八世纪时还有一些人试图用别的方法几何地表示复数，但这些方法的用途不广泛．当时还没有一个几何表示形式使复数更能被人接受．

十八世纪初期，大多数数学家都相信，不同的复数根将会引进不同类型或不同阶的复数，都相信可能存在理想的根，这些根的性质他们还不能详细说明，但大概可以设法把它们算出来． 但是 d'Alembert，在他的得奖著作《关于风的一般成因的考虑》(*Réflexions sur la cause générale des vents*, 1747) 中断言：每一个由复数经过代数运算(他把取任意次幂包括在内)建立起来的式子都是一个形为 $A+B\sqrt{-1}$ 的复数． 在证明这个结论的过程中他遇到的一个困难是 $(a+bi)^{g+hi}$ 的情形． 他的关于这个结论的证明还必须经过 Euler，Lagrange 和其他人的修补． 在《百科全书》中，d'Alembert 一反常态，对复数保持了沉默．

在整个十八世纪中，复数的卓有成效的应用已足使数学家对它们建立起一些信心(第 19 章第 3 节；第 27 章第 2 节)．不管什么地方，在数学推理的中间步骤中用了复数，结果都被证明是正确的；这个事实产生了有力的反响．当然还存在一些怀疑，怀疑推理的可靠性，甚至常常怀疑结论的正确性．

1799 年 Gauss 对代数基本定理作出了他的第一个证明，而因为这必须依赖于对复数的承认，所以 Gauss 就巩固了复数的地位．后来，十九世纪勇敢地带着复值函数向前冲．但是，即使在复函数论在流体动力学中发展了并应用了好长一段时间之后，剑桥大学的教授们仍然保持"一种对讨厌的 $\sqrt{-1}$ 抱不可动摇的厌恶心理，采用笨办法去杜绝它的出现，或用之于一切可能的地方．"

甚至到了1831年那样晚的时候，人们对复数的普遍看法，还可以从 De Morgan 的著作《论数学的研究和困难》中了解到. 他说他这本书把当时牛津和剑桥使用的最好的书本中的一切东西都包揽无遗. 谈到复数，他说:

> 我们已经证明了记号 $\sqrt{-a}$ 是没有意义的，或者甚至是自相矛盾或荒唐可笑的. 然而，通过这些记号，代数中极其有用的一部分便建立起来了. 它依赖于一件必须用经验来检验的事实，即代数的一般规则可以应用于这些式子[复数]，而不会导致任何错误的结果. 要把这个性质求助于经验，那是与本书开头写下的一些最重要的原理相违背的. 我们不能否认实际情况确是这样，但是必须想到这只不过是一门很大的学科中的一个小小的和孤立的部分. 对于这门学科的其余一切分支，这些原理将完整地得到应用.

上文中的"原理"，他指的是数学真理应该由公理经过演绎推理得出来.

接着，他把负根和复根加以比较.

> 于是，在负的结果和虚的结果之间就有截然的区别. 当一个问题的答案是负的时候，在产生这个结果的方程里变换一下 x 的符号，我们就可以或者发现形成那个方程的方法有错误，或者证明问题的提法太局限，因而可以扩展，使之容许一个令人满意的答案. 但当一个问题的答案是虚的时候，情形就不是这样了……. 对于支持和反对这种问题(如用负的量，等等)的所有论据，我们不赞成采用完全介入的办法来阻止学生的进步，这些论据他们不能理解，而且论据本身在两方面都无确定结果；但是学生

> 也许会意识到困难确实存在，这些困难的性质可以给他们指明，然后他们也许会通过充分多的(分类处理的)例子的考虑，而相信法则所引向的结果.

在 Morgan 写这番话的时候，人们正在弄清楚复数和复函数的概念. 但是新知识的传播是缓慢的. 确实，整个十八世纪和十九世纪上半叶都在热烈地争论着复数的意义. John Bernoulli, d'Alembert 和 Euler 的所有论点都被不断地改头换面重复出现. 甚至二十世纪的三角教科书也通过不包含 $\sqrt{-1}$ 的证明，补充介绍了应用复数的材料.

这里我们注意到另外一点，它的重要性与它的简洁性几乎成反比，根据简洁性，它可以叙述如下：十八世纪时没有人为实数系和复数系的逻辑操心. Euclid 在《原本》第 V 卷中为建立不可通约量的性质而曾做过的说明被漠视了. 产生这种漠视的部分解释是：因为那种说明依赖于几何，而十八世纪时，算术与代数已经独立于几何了. 其次，这种逻辑的发展，即使适当地修改一下使它能从几何中解脱出来，也不能建立起负数和复数的逻辑基础；而这也可以使数学家们断绝任何想要严密地建立数系的企图. 最后，本世纪主要关心的是在科学中使用数学，而且因为运算法则(至少对实数来说)直观上是可靠的，所以没有一个人真正地担心数系的基础. 典型的例子是 d'Alembert 在《百科全书》中关于负数的条款里所说的一段话. 这一条款写得一点儿也不清楚，他下结论道："对负数进行运算的代数法则，任何一个人都是赞同的；并认为是正确的，不管我们对这些量有什么看法." 各种类型的数从来没有合适地介绍给社会，然而在十八世纪的数学界却争得了一个比较稳固的地位.

2. 方 程 论

从十七世纪延续下来的几乎没有一点中断的一门科学研究是解多项式方程. 这个课题在数学中是基本的课题,所以,要获得解任意次方程的较好方法,要得到求方程近似根的较好方法,要完成方程的理论——特别是证明每一个 n 次多项式方程有 n 个根, 对这些问题有兴趣是很自然的. 另外, 在积分中采用部分分式法就提出了这样的问题: 是不是任何实系数多项式都能分解成线性因式的乘积,或分解成实系数的一次因式和二次因式的乘积, 以避免使用复数?

我们在第 19 章(第 4 节)中已看到, Leibniz 不相信每一个实系数多项式能分解成实系数的一次因式和二次因式的乘积. Euler 的看法是正确的. 他在 1742 年 10 月 1 日给 Nicholas Bernoulli (1687～1759)的信中断言(但没有证明): 任意次数的实系数多项式是能够这样表示的. Nicholas 不相信这一结论是正确的, 并举了一个例子: 他说多项式

$$x^4-4x^3+2x^2+4x+4$$

的零点是 $1+\sqrt{2+\sqrt{-3}}$, $1-\sqrt{2+\sqrt{-3}}$, $1+\sqrt{2-\sqrt{-3}}$ 和 $1-\sqrt{2-\sqrt{-3}}$, 这是与 Euler 的结论相矛盾的. Euler 在 1742 年 12 月 15 日写给 Goldbach 的信中(Fuss, 第 1 卷第169～171页)指出,复根是以共轭形式成对地出现的,所以 $x-(a+b\sqrt{-1})$ 和 $x-(a-b\sqrt{-1})$ 的乘积(其中 $a+b\sqrt{-1}$ 和 $a-b\sqrt{-1}$ 互为共轭) 是一个实系数的二次多项式. 接着 Euler 证明这对于 Bernoulli 的例子也是正确的. 但是 Goldbach 也拒绝接受这种思想,不认为每一个实系数多项式能分解成实系数因式的乘积, 并给出例子 $x^4+72x-20$. 后来 Euler 给 Goldbach 证明后者做错了, 并说明他自己的定理对于直到六次多项式都成立. 但是 Goldbach 仍不相信, 因为 Euler 没有成功地作出他断言的一般性证明.

把一个实系数多项式因式分解成实系数的一次和二次因式的

问题，关键在于证明每一个这样的多项式至少有一个实根或一个复根．因此这件事的证明(叫做代数基本定理)就成了一个主要的目标．

D'Alembert 和 Euler 的证明是不完全的．1772 年[1]，Lagrange 在一个又长又详细的论证中，“完成”了 Euler 的证明．但是 Lagrange 象 Euler 以及他的同时代人一样，随便地把数的一般性质应用于想象为方程的根上，而没有证明多项式方程的根在最坏的情况下是复数．因为不知道根的性质，所以他的证明实际上是不完全的．

基本定理的第一个实质性证明是 Gauss 在他 1799 年于海尔姆斯泰特(Helmstädt)写的博士论文中作出的[2]，虽然从现代的标准来看，这个证明依然是不严格的．他批评了 d'Alembert, Euler 和 Lagrange 的工作，然后作出了自己的证明．Gauss 的方法不是去计算一个根，而是去证明它的存在．他指出 $P(x+iy)=0$ 的复根 $a+ib$ 相应于平面上的点 (a, b)，如果 $P(x+iy)=u(x, y)+iv(x, y)$，那末 (a, b) 必定是曲线 $u=0$ 和 $v=0$ 的交点．通过对这些曲线作定性的研究，他证明一条曲线上的一段连续弧连结着两个不同区域上的点，而这两个区域是被另一条曲线隔开的．所以曲线 $u=0$ 必定与曲线 $v=0$ 相交．这个论证是有高度创造性的．但是他依靠了这些曲线的图形，证明它们必然相交，而这些图形是有点复杂的．在同一篇论文中，Gauss 证明了 n 次多项式能表成一次和二次实系数因式的乘积．

Gauss 还作出了这定理的三个别的证明．在第二个证明中[3]，他不用几何的论据．其中他还证明了每两个根之差的乘积(我们遵循 Sylvester 的说法，把它叫做判别式)能表成多项式和它的导数的线性组合，所以多项式和它的导数有公共根的充要条件是判别

(1) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1772, 222 ff. = *Œuvres*, 3, 479～516.
(2) *Werke*, 3, 1～30; 再现于 Euler 的 *Opera*, (1), 6, 151～169.
(3) *Comm. Soc. Gott.*, 3, 1814/1815, 107～142 = *Werke*, 3, 33～56.

式等于零. 但是，这第二个证明假定了当多项式在 x 的两个不同的值之间没有零点时，它在这两个值处不可能改变符号. 这件事实的证明超过了当时数学的严密程度.

第三个证明[4]其实使用了我们现在所谓的 Cauchy 积分定理(第 27 章第 4 节)[5]. 第四个证明[6]，就其涉及到的方法而言，是第一个证明的变种. 但是，在这个证明中，Gauss 更自由地使用了复数，他说，这是因为它们现在已属于普通的知识了. 值得指出的是，在许多证明中，这条定理都不是在最一般的情形下证明的. Gauss 的前三个证明和后来 Cauchy, Jacobi 和 Abel 的证明都假定了，(文字的)系数表示实数，但整个定理却包括复系数的情况. Gauss 的第四个证明确实容许了多项式的系数是复数.

Gauss 探讨代数基本定理的方法开创了探讨数学中整个存在性问题的新的途径. 古希腊人聪明地认识到，数学研究对象的存在性必须建立在与它们有关的定理之前. 他们关于存在的准则就是可构造性. 在以后各世纪的写得更清楚的正式著作中，存在性都是通过实际获得或显示出问题中的量而建立起来的. 例如，二次方程的解的存在性，是通过把满足方程的量显示出来而建立起来的. 但是在方程的次数高于四次的情况下，这种方法就失去效用了. 当然，象 Gauss 那种存在性的证明，对于计算其存在性已建立的对象说来也许是一点用处也没有的.

当最终证明每一个实系数多项式方程至少有一个根的工作正在进行的时候，数学家们还在大力推进用代数方法求解四次以上的方程. Leibniz 和他的朋友 Tschirnhausen 是第一批作出认真

(4) *Comm. Soc. Gott.*, 3, 1816=*Werke*, 3, 59～64.

(5) 对于 Gauss 的第三个证明的讨论见 M. Bocher 的《代数基本定理的高斯的第三个证明》(Gauss's Third Proof of the Fundamental Theorem of Algebra, *Amer. Math. Soc., Bull.*, 1, 1895, 205～209). 第三个证明的译文可以看 H. Meschkowski 的《大数学家的思想方法》(*Ways of Thought of Great Mathematicians*, 1964 年, Holden-Day).

(6) *Abhand. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 4, 1848/1850, 3～34=*Werke*, 3, 73～102.

努力的人. Leibniz[7]重新考虑了不可约的三次方程, 并且深信解这种类型的方程不可能不用到复数. 接着, 他着手求五次方程的解,但是没有成功. Tschirnhausen[8]认为他已经解决了这个问题,他借助于变换 $y=P(x)$,把给定的方程变换成新的方程,这里 $P(x)$ 是一个适当的四次多项式. 这个变换消去了方程中除 x^5 和常数项以外的所有的项. 但是 Leibniz 证明了, 要求出 $P(x)$的系数,必须解一个次数高于五次的方程,所以这个方法是没有用的.

有一段时期, 解 n 次方程的问题集中在解二项方程 $x^n-1=0$ 的特殊情形. Cotes 和 De Moivre 通过用复数证明,解这个问题相当于把圆周分成 n 个等分. 为了用开根求解 (三角解未必是代数解),只要考虑 n 是奇素数的情况就够了,因为如果 $n=pm$, 其中 p 是一个素数,那就可以考虑$(x^m)^p-1=0$. 如果这个方程可以对 x^m 求解,那么 $x^m-A=0$ 就能解出来,其中 A 是前面已解出的方程的任何一个根. Alexandre-Théophile Vandermonde (1735～1796) 在 1771年的一篇论文中[9]断言,每一个形为 $x^n-1=0$ 的方程是可以用开根解出来的, 其中 n 是素数. 但是, Vandermonde 仅验证了对于 11 以下的素数 n, 这种做法是行得通的. 关于二项方程的有决定意义的工作是 Gauss 做出来的(第 31 章第 2 节).

解四次以上高次方程的主要精力集中在解一般性的方程上,而且在朝着这一目标前进的过程中, 一些关于对称函数的辅助性工作被证明是重要的. 代数式 $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 是 x_1, x_2 和 x_3 的对称函数,因为在整个式子里若用 x_j 代替任何 x_i, 用 x_i 代替 x_j, 则整个式子保持不变. 当十七世纪的代数学家注意到,而且 Newton 证明了, 多项式根的乘积的各种和可以用方程的系数表示出来的时候,研究对称函数的兴趣就产生了. 例如,当 $n=3$ 时,把方程的

(7) Georg Olms (重印)的«G. W. Leibniz 和数学家们的书信来往»(*Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, 1961),第 1 卷 547～564 页.

(8) *Acta Erud.*, 2, 1683, 204～207.

(9) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1771, 365～416, pub. 1774.

根两两相乘，它们的和

$$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1$$

是一个初等对称函数；如果方程写成

$$x^3-c_1x^2+c_2x-c_3=0,$$

那么上面的和就等于c_2. Vandermonde 在 1771 年的文章中作出的进展就是证明了根的任何对称函数都能用方程的系数表示出来。

经过很多人，其中包括 Euler 的努力[10]之后，十八世纪在用开根解方程的问题方面，杰出的工作是 Vandermonde 在 1771 年的论文中和 Lagrange 在他的长篇论文《关于方程的代数解法的思考》(Réflexions sur la résolution algébrique des équations)[11]中作出的. Vandermonder 的各种想法都是类似的，但不是那样开阔，那样清晰. 所以我们将介绍 Lagrange 的做法. Lagrange 给自己提出了一个任务：分析解三次方程和四次方程的各种方法，看看为什么这些方法能把方程解出来，看看这些方法对于解更高次的方程能够提供什么线索.

对于三次方程

$$x^3+nx+p=0, \tag{1}$$

Lagrange 注意到如果引进变换(第 13 章第 4 节)

$$x=y-(n/3y), \tag{2}$$

就得到辅助方程

$$y^6+py^3-n^3/27=0. \tag{3}$$

这个方程也叫简化方程，因为它是y^3的二次方程，若设$r=y^3$，方程就变为

$$r^2+pr-n^3/27=0. \tag{4}$$

---

(10) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 216～231, pub. 1738=*Opera*, (1), 6, 1～19 and *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9, 1762/1763, 70～98, pub. 1764=*Opera*, (1), 6, 170～196.

(11) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1770, 134～215, pub. 1772 and 1771, 138～254, pub. 1773=*Œuvres*, 3, 205～421.

现在我们看到，我们能够借助原方程的系数算出这个方程的根 r_1 和 r_2，但是从 r 回到 y 必须引进立方根或解方程

$$y^3-r=0.$$

因此，如果令 ω 是单位立方根 $(-1+\sqrt{-3})/2$，那末 y 的值就是

$$\sqrt[3]{r_1},\ \omega\sqrt[3]{r_1},\ \omega^2\sqrt[3]{r_1},\ \sqrt[3]{r_2},\ \omega\sqrt[3]{r_2},\ \omega^2\sqrt[3]{r_2},$$

因而方程(1)的各个解就是

$$x_1=\sqrt[3]{r_1}+\sqrt[3]{r_2},\ x_2=\omega\sqrt[3]{r_1}+\omega^2\sqrt[3]{r_2},\ x_3=\omega^2\sqrt[3]{r_1}+\omega\sqrt[3]{r_2}.$$

这样原方程的解就是通过简化方程的解得到的.

Lagrange 证明他的前辈们所用的各种不同方法都相当于上面的方法. 然后他指出，我们应该把我们的注意力不是集中在 x 是 y 值的函数上，而是集中在 y 是 x 的函数上，因为可以让我们全部解出来的正是简化方程，这个奥秘一定是隐藏在把简化方程的解用原先提出的方程的解表示出来这一联系之中.

Lagrange 注意到当 x_1, x_2 和 x_3 按特定的顺序取出时，每一个 y 值都能写成(因为 $1+\omega+\omega^2=0$)形式

$$y=\frac{1}{3}(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3). \tag{5}$$

检查这个式子能使我们发现简化方程(未知量是 y)的两条性质. 第一条性质是：在 y 的表达式中，根 x_1, x_2 和 x_3 不是 x_1, x_2 和 x_3 的一个固定的选择，因而这个表达式可以说是意义含糊的. 所以三个 x 值中的任一个可以是 x_1，其他两个中的任一个可以是 x_2 等等. 但是这些 x 有 $3!$ 种置换，所以有 6 个 y 值，因而 y 应满足一个六次方程. 因此简化方程的次数是由原方程的根的置换的个数决定的.

第二条性质是：关系式 (5) 还说明为什么能把六次的简化方程化简为二次方程. 因为在这六种置换中，三种(包括恒等置换)来之于交换所有的 x_i，另三种来之于只交换两个而固定一个. 但是这样一来，由于 ω 的值的缘故，所得到的 y 的 6 个值，就有关系

(6) $$y_1=\omega^2 y_2=\omega y_3;\quad y_4=\omega^2 y_5=\omega y_6,$$

并且取立方，还有

$$y_1^3=y_2^3=y_3^3,\quad y_4^3=y_5^3=y_6^3.$$

这个结论的另一种说法是，函数

$$(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3$$

在 x_1, x_2 和 x_3 的所有 6 种置换下只能取 2 个值，这正说明为什么 y 所满足的方程一定是 y^3 的二次方程．另外，y 所满足的六次方程的系数是原三次方程系数的有理函数．

对于 x 的一般四次方程，Lagrange 考虑

$$y=x_1x_2+x_3x_4.$$

这一四个根的函数在四个根的所有 24 种置换下只取三个不同的值．因此应当有 y 所满足的一个三次方程，而且这个方程的系数应该是原方程系数的有理函数．这些叙述确实适用于四次方程．

然后，Lagrange 着手处理一般的 n 次方程

(7) $$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

这个方程的系数假定是无关的，就是说，a_i 之间必需没有任何关系成立．于是所有根必定也是无关的，因为如果根之间有一个关系式成立，就可以证明它对于系数也是对的(因为实际上系数是根的对称函数)．所以一般方程的 n 个根必须考虑为是无关的变量，它们的每一个函数都是一些无关变量的函数．

为了理解 Lagrange 解决问题的计划，让我们首先来看

$$x^2+bx+c=0.$$

我们知道它的根的两个函数，即 x_1+x_2 和 x_1x_2．它们是对称函数，就是说，两个根互相交换时，函数保持不变．一个函数在它的变量进行置换时不变，我们就说这个函数容许置换．例如函数 x_1+x_2 容许 x_1 和 x_2 的置换，但函数 x_1-x_2 却不容许．

接着 Lagrange 证明了两个重要的命题．如果一般的 n 次方程的根的一个函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 容许另一个函数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

所容许的 x_i 的所有的置换（可能还容许 ψ 所不容许的一些置换），那么函数 ϕ 可以用 ψ 和一般方程 (7) 的系数有理地表示出来．例如二次方程根的函数 x_1 容许函数 x_1-x_2 所容许的所有置换（只有一个，即恒等置换）；于是

$$x_1=\frac{-b+(x_2-x_1)}{2}.$$

Lagrange 关于这个命题的证明还说明了如何把 ϕ 表达成 ψ 的有理函数．

Lagrange 的第二个命题叙述如下：如果一般方程的根的一个函数 $\phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 不容许函数 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 所容许的所有置换，但是在 ψ 所容许的置换下取 r 个不同的值，那末 ϕ 是一个 r 次方程的根，这个方程的系数是 ψ 和给定的一般 n 次方程的系数的有理函数．这个 r 次方程可以构造出来．比如 x_1-x_2 不容许 x_1+x_2 所容许的所有置换，但在这些置换下取两个值：x_1-x_2 和 x_2-x_1．于是 x_1-x_2 是一个二次方程的根，这个方程的系数是 x_1+x_2 以及 b 和 c 的有理函数．事实上，因为 $b^2-4ac=(x_1-x_2)^2$，所以 x_1-x_2 是方程

$$t^2-(b^2-4c)=0$$

的根．用这个根的值，即 $\sqrt{b^2-4c}$，我们可以通过前面关于 x_1 的方程来求得 x_1．

类似地考虑三次方程 $x^3+px+q=0$，式子（即 ϕ）

$$(x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3)^3,$$

其中 $\omega=(-1+i\sqrt{3})/2$，在根的六种可能的置换下取两个值，但是 $x_1+x_2+x_3$（即 ψ）容许所有这六种置换．如果那两个值记为 A 和 B，那末可以证明 A 和 B 是一个二次方程的根，这个方程的系数是 p 和 q 的有理函数（因为 $x_1+x_2+x_3=0$）．如果我们解出这个二次方程，求得根是 A 和 B，那末从

$$x_1+x_2+x_3=0,$$

$$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=\sqrt[3]{A},$$

$$x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=\sqrt[3]{B},$$

我们就能求得 x_1, x_2 和 x_3. 对于四次方程, Lagrange 从函数

$$x_1x_2+x_3x_4 \tag{8}$$

出发, 这个函数在根的 24 种可能的置换下取 3 个不同的值, 但是 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 容许所有的这 24 种置换. 因此(8)是一个三次方程的根, 这个方程的系数是原方程系数的有理函数. 而且事实上, 一般的四次方程的辅助方程(或简化方程)就是三次的.

对于一般系数的 n 次方程, Lagrange 的想法是从根的对称函数 ϕ_0 出发, 这个函数容许根的所有的 $n!$ 个置换. 他指出, 这样一个函数可以取 $x_1+x_2+\cdots+x_n$. 然后他选择一个函数 ϕ_1, 它只容许某些置换. 假定 ϕ_1 在 $n!$ 个置换下取 r 个不同的值, 那么 ϕ_1 就是一个 r 次方程的根, 这个方程的系数是 ϕ_0 和给定的一般方程的系数的有理函数. 这个 r 次方程可以构造出来. 再进一步, 如果 ϕ_0 取为根和系数的一个对称函数, 那么由给定的一般方程的系数, 这个 r 次方程的系数就完全知道了. 如果这个 r 次方程可以用代数方法解出来, 那么依据原方程的系数, ϕ_1 也就求得了. 然后再选择一个函数 ϕ_2, 使它只容许 ϕ_1 所容许的根的置换的一部分, ϕ_2 在 ϕ_1 所容许的置换下假定取 s 个不同的值. 那么 ϕ_2 就将是一个 s 次方程的根, 这方程的系数是 ϕ_1 和给定的一般方程系数的有理函数. 如果那个 r 次方程(ϕ_1 是它的一个根)能够解出来, 那么这个 s 次方程的系数也就知道了. 如果这个 s 次方程可以用代数方法解出来, 那末根据原方程的系数, ϕ_2 也就知道了.

如此继续下去, 选择 ϕ_3, ϕ_4, $\cdots$, 直到最后一个函数, 选择为 x_1. 于是, 如果这些 r 次, s 次, ……方程都能用代数方法解出来, 那么根据给定的一般方程的系数, x_1 也就知道了. 其他的根 x_2, x_3, $\cdots$, x_n, 由同样的过程可以得到. 这些 r 次, s 次, ……的方程

今天叫做预解方程[12].

Lagrange 的方法对于求解一般的二次、三次和四次方程都卓有成效. 他试图用这种方法去解五次方程, 但发现工作是如此艰难, 以致不得不放弃. 对于三次方程他只要解一个二次方程, 但对于五次方程, 他就必须解一个六次方程. Lagrange 徒劳地寻求一个预解函数(在他对这个术语的解释下), 使它能满足一个次数低于五次的方程. 但是, 他的工作没有给出选择 ϕ_i 的任何准则, 使这些 ϕ_i 满足一个代数可解的方程. 另外, 他的方法只能用于一般的方程, 因为他的两个基本命题都假定根是无关的.

Lagrange 被迫得出结论说, 用代数运算解一般的高次方程 $(n>4)$ 看来是不可能的. (对于特殊的高次方程, 他贡献很少). 他判断说, 或者是这个问题超越了人的智力范围, 或者是根的表达式的性质必定不同于当时所知道的一切. Gauss 在他的 1801 年的«专题论文»(*Disquisitiones*)中, 也声称这个问题也许是不能解决的.

Lagrange 的方法尽管很少成功, 但它确实给出了洞察 $n\leqslant 4$ 时成功而 $n>4$ 时失败的道理; 这种洞察力为 Abel 和 Galois 所利用(第 31 章). 另外, Lagrange 的思想是必须考虑一个有理函数当它的变量发生置换时所取的值的个数, 这个思想引导到置换或代换群的理论. 其实, 他已实际上得到了这样的定理: 一个群的子群的阶(元素的个数)必定是该群的阶的因子. Lagrange 的著作是一切关于群论的著作的先导, 上述定理在其中所取的形式是: ϕ_1 所取的值的个数 r 是 $n!$ 的因子.

受 Lagrange 的影响, Paolo Ruffini (1765～1822) 在 1799 到 1813 年之间作过好几种尝试, 要证明四次以上的高次方程应是不能用代数方法解出的. (Paolo Ruffini 是一个数学家、医生、政治

(12) Lagrange 对函数 ϕ_i 的特殊形式用了"预解"这个词, 而不是指 ϕ_i 所满足的方程. 例如, 对于三次方程, $x_1+\omega x_2+\omega^2x_3$ 是 Lagrange 意义下预解的一种形式.

家，是 Lagrange 的一个热忱的弟子.）在他的«方程的一般理论»（*Tecria generale delle equazioni*）[13]中，Ruffini 用 Lagrange 所创的方法成功地证明了不存在一个预解函数（在 Lagrange 的意义下），能满足一个次数低于 5 次的方程．事实上，他证明了当 $n>4$ 时，不存在一个 n 元有理函数，在 n 个元素发生置换时取 3 个或 4 个值．后来，在他的«用一般的代数方法解方程的一些想法»（*Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*）[14]中，他大胆地着手证明，用代数方法解 $n>4$ 的一般方程是办不到的．虽然一开始 Ruffini 就相信这个结论是正确的，但他的努力没有达到目标．Ruffini 用了（但没有证明）这样一条辅助定理（现在叫做 Abel 定理）：如果一个方程能用开根解出来，那末根的表达式就能写成这样一种形式，其中的根式是已知方程的根和单位根的有理系数的有理函数．

3．行列式和消元法理论

线性方程组的研究是在 1678 年以前由 Leibniz 开创的，我们今天把方程组写成

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,\quad i=1,2,\cdots,m, \tag{9}$$

其中 x_i 是已知量，而 y_j 是未知量．1693 年，Leibniz[15] 用指标数的系统集合，表示含两个未知量 x 与 y 的三个线性方程所组成的系统的系数．他从三个线性方程的系统中消去两个未知量，得到一个行列式，现在叫做方程组的结式．这个行列式等于零就意味着存在一组 x 和 y，满足所有的这三个方程．

用行列式的方法解含有两个、三个和四个未知量的联立线性

(13) 1799=*Opere Mat.*, 1, 1～324.

(14) 1813=*Opere Mat.*, 2, 155～268.

(15) *Math. Schriften*, 2, 229, 238～240, 245.

方程，可能在1729年，是由Maclaurin开创的，并发表在他的遗作《代数论著》(*Treatise of Algebra*, 1748)中．虽然书中的记法不太好，但是他的法则是我们今天所使用的法则，Cramer把它发表在他的《线性代数分析导言》(*Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 1750)中．Cramer给出了一条法则，用于确定经过五个点的一般的二次曲线 $A+By+Cx+Dy^2+Exy+x^2=0$ 的系数．他的行列式，和现在一样，是这样一些乘积的和，这些乘积是在每一行和每一列中取一个且只取一个元素组成；每一个乘积的符号是这样确定的，即从标准次序出发，得到这些元素的排列所需的重排数，如果这个数是偶数，则符号是正的，否则就是负的．1764年，Bezout[16]把确定行列式每一项的符号的手续系统化了．给定了含 n 个未知量的 n 个齐次线性方程，Bezout证明：系数行列式等于零(结式等于零)是这方程组有非零解的条件．

Vandermonde[17]是第一个对行列式理论作出连贯的逻辑的阐述(即把行列式理论与线性方程组求解相分离)的人，虽然他也把它应用于解线性方程组．他还给出了一条法则，用二阶子式和它们的余子式来展开行列式．从集中到对行列式本身进行研究这一点来说，他是这门理论的奠基人．

参照Gramer和Bezout的工作，Laplace在1772年的论文《对积分和世界体系的探讨》[18]中，证明了Vandermonde的一些规则，并推广了他的展开行列式的方法，用 r 行中所含的子式和它们的余子式的集合来展开行列式，这个方法现在仍然以他的名字命名[19]．

譬如说，含有两个未知量的三个非齐次线性方程组成的方程

(16) *Hist. de l'Acad. des Sci. Paris*, 1764, 288～388.

(17) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1772, 516～532, pub. 1776.

(18) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1772, 267～376, pub. 1776＝*Œuvres*, 8, 365～406.

(19) 参看 M. Bocher 的 ***Introduction to Higher Algebra***, Dover (reprint), 1964, p. 26.

组，有公共解的条件是结式等于零，这个条件还表示从三个方程消去 x 和 y 得到的结果．但是消元法的问题在向别的方向伸展．给定两个多项式

$$f=a_0x^n+\cdots+a_n,$$
$$g=b_0x^n+\cdots+b_n,$$

要求 $f=0$ 和 $g=0$ 有公共解的条件．因为这个条件涉及这样一个事实，即至少存在 x 的一个值既满足 $f=0$ 又满足 $g=0$，所以把从 $f=0$ 解得的 x 值，代入 g，就得到 a_i 和 b_i 所应满足的条件．这个条件；或者消去式，或者结式，是 Newton 第一个进行研究的．在他的《普遍的算术》中他给出了从两个方程(次数可以是二次到四次)中消去 x 的法则．

Euler 在他的《引论》第二卷第 19 章中给出了两个消元的方法．第二个方法是 Bezout 的乘数法的前驱，Euler 在 1764 年的论文[20]中对这个方法作了更好的描述．Bezout 的方法证明是得到最广泛认可的一种方法，因此我们将对它进行考察．在他的《数学教程》(*Cours de mathématique*, 1764～1769) 中，Bezout 考虑两个 n 次方程：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0,\qquad (10)$$
$$\phi(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0=0.$$

第一步：f 乘以 b_n，ϕ 乘以 a_n，然后相减；第二步：f 乘以 b_nx+b_{n-1}，ϕ 乘以 a_nx+a_{n-1}，然后相减；第三步：f 乘以 $b_nx^2+b_{n-1}x+b_{n-2}$，ϕ 乘以 $a_nx^2+a_{n-1}x+a_{n-2}$，然后相减；……．这样得到的每个方程都是 x 的 $n-1$ 次方程．可以认为这组方程是未知量为 x^{n-1}，x^{n-2}，…，1 的 n 个齐次线性方程的组合．这个线性方程组的结式(即未知量系数的行列式)是最初两方程 $f=0$ 和 $\phi=0$ 的结式．当

(20) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 20, 1764, 91～104, pub. 1766=*Opera*, (1), 6, 197～211.

两个方程的次数不同时，Bezout 也给出了一个求结式的方法[21].

消元法理论也适用于次数高于1的两个方程：$f(x, y)=0$ 和 $g(x, y)=0$. 解这个问题的动机是出于要确定两个方程的公共解的个数，或者从几何角度来讲，是求出相应于这两个方程的曲线的交点的个数. 从 $f(x, y)=0$ 和 $g(x, y)=0$ 消去一个未知量的卓越方法，是由 Bezout 第一个在1764年的文章中勾出大致轮廓，而在他的《代数方程的一般理论》(*Théorie générale des équations algébriques*, 1779) 中公布于众的. Bezout 的想法是：把 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 分别乘上适当的多项式 $F(x)$ 和 $G(x)$，就能作出

$$R(y)=F(x)f(x, y)+G(x)g(x, y). \tag{11}$$

另外，他还寻求 F 和 G，使得 $R(y)$ 的次数尽可能地低.

结式的次数的问题也由 Bezout 在他的《代数方程的一般理论》中作出了回答 (Euler 在1764年的论文中也独立地回答了这个问题). 两人的答案都是 mn，即 f 和 g 的次数的乘积，两个人都把问题归结为从一个辅助的线性方程组中进行消元的问题，从而证明这条定理. 上述的这个乘积也是两条代数曲线的交点数. Jacobi[22] 和 Minding[23] 对于两个方程的组合也给出了 Bezout 的消元法. 但是他们谁也没有提到 Bezout. 也许是他们并不知道 Bezout 的工作.

4. 数　论

数论在十八世纪留下来一系列互不关联的成果. 在这门学科中最主要的著作是 Euler 的《代数指南》(*Anleitung zur Algebra*, 1770年德文版)和 Legendre 的《数论随笔》(*Essai sur la théorie des*

(21) 一种解说可以在 W. S. Burnside 和 A. W. Panton 的 *The Theory of Equations*, 1960年 Dover(重印)的第2卷第76页上找到.

(22) *Jour. für Math.*, 15, 1836, 101～124=*Gesam. Werke*, 3, 297～320.

(23) *Jour. für Math.*, 22, 1841, 178～183.

nombres, 1798). 后者的第二版于1808年出版，书名是《数论》(*Théorie des nombres*)；增补了的第三版,分成两卷,于1830年问世. 这里要叙述的问题和结果，只是已完成的工作中抽出来的一部分小小的样品.

1736年, Euler 证明了 Fermat 的小定理[24],即如果 p 是一个素数, a 和 p 互素，那么 a^p-a 可以被 p 整除. 十八和十九两个世纪的其他一些人对这一定理作出了许多种证明. 1760年, Euler 引进 ϕ 函数，或者叫做 n 的 totient, 用来推广这条定理[25]; $\phi(n)$ 是小于 n 而与 n 互素的整数的个数，所以当 n 是素数时, $\phi(n)$ 就等于 $n-1$. [记号 $\phi(n)$ 是 Gauss 引进的.] 接着, Euler 证明，如果 a 和 n 互素,那末

$$a^{\phi(n)}-1$$

可以被 n 整除.

至于 Fermat 对 $x^n+y^n=z^n$ 所作的著名猜测, Euler 证明[26]当 $n=3$ 和 $n=4$ 时，它是正确的; $n=4$ 的情形是已经由 Frénicle de Bessy 证明了的. Euler 的这个工作必须由 Lagrange, Legendre 和 Gauss 来完成. 接着 Legendre 对于 $n=5$ 证明了这个猜测[27]. 我们将要看到,努力去证明 Fermat 猜测的历史是很长久的.

Fermat 还曾猜测说(第13章第7节)，对于 n 值的一个不定的集合,由式子

$$2^{2^n}+1$$

得到的数是素数. 对于 $n=0, 1, 2, 3$ 和 4, 这都是对的. 但是

(24) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1736, 141～146, pub. 1741＝*Opera*, (1), 2, 33～37.

(25) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1760/1761, 74～104, pub. 1763＝*Opera*, (1), 3, 531～555.

(26) *Algebra*, Part II, Second Section, 509～516＝*Opera*, (1), 1, 484～489 (for $n=3$); and *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1738, 125～146, pub. 1747＝*Opera*, (1), 2, 38～59 (for $n=4$).

(27) *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 6, 1823, 1～60, pub. 1827.

1732 年 Euler 证明[28]当 $n=5$ 时，这个数不是素数，它的一个因子是 641. 事实上，现在知道对许多其他的 n 值，由这个式子得到的数不是素数，但没有发现过一个比 4 大的数，代入后得到的数是素数. 然而，这个式子的重要性在于它重新出现在 Gauss 论正多边形的可作图性的著作中(第 31 章第 2 节).

一个有许多分支的研究课题涉及到把各种类型的整数分解成其他类型的整数. Fermat 曾经断言：每一个正整数是不多于四个平方数的和(一个平方数重复出现，比如 $8=4+4$, 是容许的，只要把它出现的次数算上). 在四十年以上的长时间里，Euler 一直试图证明这个定理，并作出了一部分结果[29]. Lagrange[30]用了 Euler 的一部分工作，证明了这条定理. 不管是 Euler 还是 Lagrange, 都没有得到一个正整数究竟能表成几个平方数的和.

在刚才提到的 Euler 1754/1755 年的论文和同一本杂志[31]的另一篇文章中，Euler 证明了 Fermat 的断言，即每一个形为 $4n+1$ 的素数能唯一地分解成两个平方数的和. 但是 Euler 没有按照递降法去做，这一递降法是 Fermat 为这个定理勾划出来的一种方法. 在另一篇论文中[32], Euler 还证明了两个相对互质的平方数之和的每一个因子，是两个平方数之和.

Edward Waring (1734～1798) 在他的《代数沉思录》(*Meditationes Algebraicae*, 1770) 中叙述了一条定理，现在称之为"Waring 定理"，定理说每一个整数，或者是一个立方数，或者是至多九个立方数之和；另外，每一个整数，或者是一个四次方数，或者是至多

(28) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 6, 1732/1733, 103～107 = *Opera*, (1), 2, 1～5.

(29) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 5, 1754/1755, 13～58, pub. 1760 = *Opera*, (1), 2, 338～372.

(30) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1, 1770, 123～133, pub. 1772 = *Œuvres*, 3, 189～201.

(31) 5, 1754/1755, 3～13, pub. 1760 = *Opera*, (1), 2, 328～337.

(32) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 4, 1752/1753, 3～40, pub. 1758 = *Opera*, (1), 2, 295～327.

19个四次方数之和. 他还猜测说每一个正整数可以表成至多r个k次幂之和,其中r依赖于k. 这些定理他都没有证明[33].

普鲁士派往俄罗斯的一位公使 Christian Goldbach, 在 1742 年6月7日给 Euler 的信中, 叙述了一个结论, 但没有作出证明. 他说,每一个偶整数是两个素数之和,每一个奇整数或者是一个素数,或者是三个素数之和. 这个断言的第一部分现在称为Goldbach猜想, 仍然是一个未解决的问题. 断言的第二部分其实可以从第一部分推出, 因为如果n是奇数, 那么从n减去任意一个素数p, $n-p$就是偶数.

在有关数的分解的某些更专门化的成果中, 包含有 Euler 证明的x^4-y^4和x^4+y^4不能是平方数的结论[34]. Euler 和 Lagrange 证明了 Fermat 的许多断言. 这些断言大意是说某些素数能用特殊的方式表示出来. 例如, Euler 证明了[35]形为$3n+1$的素数能唯一地表成形式x^2+3y^2.

亲和数和完全数继续吸引着数学家们. Euler[36]给出了62对亲和数, 其中包括已经知道的3对, 还有2对是错的. 在一篇死后出版的论文中[37],他还证明了 Euclid 定理的逆定理: 每一个完全偶数是形为$2^{p-1}(2^p-1)$的数,其中第二个因子是素数.

John Wilson (1741～1793) 是剑桥大学学数学的一个得奖学生, 但后来当了律师和法官,他叙述了一条定理,现在仍以他的名字命名: 对每一个素数p, 量$(p-1)!+1$能被p整除; 而且, 如果

(33) 一般性的定理是由 David Hilbert 证明的(*Math. Ann.*, 67, 1909, 281～300).

(34) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 10, 1738, 125～146, pub. 1747=*Opera*, (1), 2, 38～59; also in *Algebra* (1770), Part II, Ch. 13, arts. 202～208=*Opera*, (1), 1, 436～443.

(35) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 8, 1760/1761, 105～128, pub. 1763=*Opera*, (1), 2, 556～575.

(36) "De numeris amicabilibus," *Opuscula varii argumenti*, 2, 1750, 23～107=*Opera*, (1), 2, 86～162.

(37) "De numeris amicabilibus." *Comm. Arith.*, 2, 1849, 627～636=*Opera postuma*, 1, 1862, 85～100=*Opera*, (1), 5, 353～365.

这个量能被 q 整除，那么 q 就是一个素数．Waring 在他的《代数沉思录》中公布了这条定理，Lagrange 在1773年证明了它[38]．

求方程 $x^2-Ay^2=1$ 的整数解的问题已经讨论过了（第13章第7节）．Euler 在1732/1733年的一篇论文中，错误地把它叫做 Pell 方程，这个名称就这样固定下来了．Euler 开始对这个方程感兴趣，因为他需要用这个方程的解去求 $ax^2+bx+c=y^2$ 的整数解．关于后面这个题目他写过几篇文章．1759年，他通过把 $\sqrt{A}$ 表成一个连分式[39]，给出了一种解 Pell 方程的方法．他的想法是：满足方程的 x 和 y 的值是使得 x/y 收敛到（在连分式的意义下）$\sqrt{A}$ 的值．在证明他的方法总能求出解来，而且它的所有的解都是由 $\sqrt{A}$ 的连分式展开给出的时候，他失败了．Pell 方程解的存在性是 Lagrange 在1766年证明的[40]，在后来的几篇论文中他的证明更简单了[41]．

Fermat 曾断言，他能够确定更一般的方程 $x^2-Ay^2=B$ 什么时候有整数解，并说在可解的时候，他就能够把它解出来．这个方程是由 Lagrange 在刚才提到的那两篇论文中解出来的．

求一般方程

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

（其中系数都是整数）的所有整数解的问题也解决了．Euler 给出了解的不完整的类；后来 Lagrange[42] 给出了完全的解．在《纪要》[43]的下卷里，他作出了一个更简单的证明．

(38) *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 2, 1771, 125 ff., pub. 1773＝*Œuvres*, 3, 425～438.

(39) *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 11, 1765, 28～66, pub. 1767＝*Opera*, (1), 3, 73～111.

(40) *Misc. Taur.*, 4, 1766/1769, 19 ff.＝*Œuvres*, 1, 671～731.

(41) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23, 1767, 165～310, pub. 1769, and 24, 1768, 181～256, pub. 1770＝*Œuvres*, 2, 377～535 and 655～726；还包含在 Lagrange 翻译的 Euler 的 *Algebra* 的补充部分中；见参考书目．

(42) *Mém. de l'Acad. de Berlin*, 23, 1767, 165～310, pub. 1769＝*Œuvres*, 2, 377～535.

(43) 24, 1768, 181～256, pub. 1770＝*Œuvres*, 2, 655～726.

十八世纪中数论的最富于首创精神、可能引出最多成果的发现是二次互反律．它用了二次剩余的概念．这里，我们采用由 Euler 在 1754/1755 年的一篇论文中引入，后由 Gauss 采用的说法：如果存在一个 x，使得 x^2-p 能被 q 整除，那么就说 p 是 q 的二次剩余；如果这样的 x 不存在，那末就说 p 是 q 的二次非剩余．Legendre(1808 年)发明了一个记号，现在用于表示上面提到的两种情况中的任意一种．这个记号是 (p/q)，它的意义如下：对于任意数 p 和任意素数 q，

$$(p/q)=\begin{cases} 1 & \text{当 } p \text{ 是 } q \text{ 的二次剩余时,} \\ -1 & \text{当 } p \text{ 是 } q \text{ 的二次非剩余时.} \end{cases}$$

还可以认为，如果 p 恰好能被 q 整除，则 $(p/q)=0$.

在这种记号下，二次互反律说，如果 p 和 q 是不同的奇素数，那末

$$(p/q)(q/p)=(-1)^{(p-1)(q-1)/4}.$$

这个意思就是，如果 (-1) 的指数是偶数，那么，p 是 q 的二次剩余，同时 q 是 p 的二次剩余；或者哪一个也不是另一个的二次剩余．如果 (-1) 的指数是奇数，这在 p 和 q 是形为 $4k+3$ 的素数时出现，那么其中一个素数是另一个素数的二次剩余，但第二个数则不是第一个数的二次剩余．

这一定理的历史须详细说一下．Euler 在 1783 年的一篇论文[44]中给出了四条定理和第五条总结性的定理，非常清楚地叙述了二次互反律．但是，对这些定理他没有进行证明．这篇论文里的工作注明是从 1772 年开始做的，而且被编进了甚至更早一些的著作里．Kronecker 在 1875 年[45]注意到，这条定理的叙述实际上已包含在 Euler 很早以前写的论文中了[46]．但是 Euler 的"证明"

(44) *Opuscula Analytica*, 1, 1783, 64～84＝*Opera*, (1), 3, 497～512.

(45) *Werke*, 2, 3～10.

(46) *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14, 1744/1746, 151～181, pub. 1751＝*Opera*, (1), 2, 194～222.

是建立在计算的基础上的. 1785年Lagendre在他关于这个课题的论文中独立地宣布了这一定律，虽然他引用了Euler在《短论》的同一卷里的另一篇文章. 他的证明[47]是不完全的. 在他的《数论》[48]中他再一次叙述了这条定律，并给了另外一个证明. 但是，这一证明仍然是不完全的，因为其中假定了在某一算术级数中存在无穷多个素数. 要发现这一定律后面究竟隐藏着什么，从它究竟可以引伸出多少含意，这些问题曾经成了1800年后数论研究的关键性课题，而且导致了一些重要的发现，其中的一部分我们将要在后面章节中讨论.

十八世纪数论方面的工作是以Legendre 1798年的名著《数论》而结束的. 虽然这本书包含了一批有趣的结果，有些是数论方面的，也有些是其他方面的(比如椭圆积分方面的)，但是Legendre没有作出重大的新发现. 人们可以指责他，介绍了一大堆命题，从中本来可以抽象出一些一般性概念，但他却没有这样做. 这项工作是由他的后继者们完成的.

参考书目

Cajori, Florian: "Historical note on the Graphical Representation of Imaginaries Before the Time of Wessel," *Amer. Math. Monthly*, 19, 1912, 167~171.

Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, 1898 and 1924; Johnson Reprint Corp., 1965, Vol. 3, Chap. 107; Vol. 4, pp. 153~198.

Dickson, Leonard E.: *History of the Theory of Numbers*, 3 vols., Chelsea (reprint), 1951.

Dickson, Leonard E.: "Fermat's Last Theorem," *Annals of Math.*, 18, 1917, 161~187.

Euler, Leonhard: *Opera Omnia*, (1), Vols. 1~5, Orell Füssli, 1911~1944.

Euler, Leonhard: *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) = *Opera Omnia*, (1), 1.

Fuss, Paul H. von, ed.: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres*

(47) *Hist. de l'Acad. des Sci., Paris*, 1785, 465~559, pub. 1788.

(48) 1798, 214~226; 2nd ed., 1808, 198~207.

géomètres du XVIIIème siècle, 2 vols. (1843), Johnson Reprint Corp., 1967.

Gauss, Carl Friedrich: *Werke*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1876, Vol. 3, pp. 3~121.

Gerhardt, C. I.: *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, Mayer und Müller, 1899; Georg Olms (reprint), 1962.

Heath, Thomas L.: *Diophantus of Alexandria*, 1910, Dover (reprint), 1964, pp. 267~380.

Jones, P. S.: "Complex Numbers: An Example of Recurring Themes in the Development of Mathematics," *The Mathematics Teacher*, 47, 1954, 106~114, 257~263, 340~345.

Lagrange, Joseph-Louis: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1867~1869, Vols. 1~3, relevant papers.

Lagrange, Joseph-Louis: "Additions aux éléments d'algèbre d'Euler," *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1877, Vol. 7, pp. 5~179.

Legendre, Adrien-Marie, *Théorie des nombres*, 4th ed., 2 vols., A. Blanchard (reprint), 1955.

Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, 1906, Dover (reprint), 1960, Vol. 1, pp. 1~52.

Ore, Oystein: *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, 1948.

Pierpont, James: "Lagrange's Place in the Theory of Substitutions," *Amer. Math. Soc. Bulletin*, 1, 1894/1895, 196~204.

Pierpont, James: "Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (bis 1858)," *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 6, 1895, 15~68.

Smith, H. J. S.: *Report on the Theory of Numbers*, 1867, Chelsea (reprint), 1965; also in Vol. 2 of the *Collected Mathematical Papers of H. J. S. Smith*, 1894, Chelsea (reprint), 1965.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, 1929, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, relevant selections. One of the selections is an English translation of Gauss's second proof of the fundamental theorem of algebra.

Struik, D. J.: *A Source Book in Mathematics*, 1200~1800, Harvard University Press, 1969, pp. 26~54, 99~122.

Vandiver, H. S.: "Fermat's Last Theorem," *Amer. Math. Monthly*, 53, 1946, 555~578.

Whiteside, Derek T.: *The Mathematical Works of Isaac Newton*, Johnson Reprint Corp., 1967, Vol. 2, pp. 3~134. This section contains Newton's *Universal Arithmetic* in English.

Wussing, H. L.: *Die Genesis der abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1969.

26

十八世纪的数学

> 当我们不能用数学指南针或经验的火炬时，……肯定的，我们连一步也不能向前迈进.
>
> Voltaire

1. 分析的兴起

如果十七世纪曾经正确地被称为天才的世纪，那末，十八世纪就可以称为发明的世纪. 虽然这两个世纪都是多产的，而且十八世纪的人并没有引进象微积分那样新颖、那样基本的概念，但他们施展了高超的技巧，发掘并增进了微积分的威力，从而产生了现在比较重要的一些分支：无穷级数，常微分方程和偏微分方程，微分几何和变分法. 在把微积分扩展到这几个领域的过程中，他们建立了现在数学中最广阔的一个领域，我们把它叫做分析(虽然，这个词现在的含意还包括十八世纪的人几乎未曾接触过的两个另外的分支). 另一方面，坐标几何与代数的进展，同它们在十七世纪开始被引进时的情况比起来，只不过是一个小小的扩展. 即使是代数中的重大问题，即解 n 次方程的问题，也只是由于分析中(例如，用部分分式法求积分时)要用到它，才受到人们的注意.

差不多在这一世纪的前三分之一的时期内，几何方法是到处被使用着的；但是 Euler 和 Lagrange，认识到分析方法具有更大的有效性之后，他们就慎重地、逐渐地把几何论证换成分析论证. Euler 的许多教科书都说明怎样使用分析. 接近这一世纪末尾的时候，Monge 确实复兴了纯粹几何，虽然他大量地使用几何是为

了给分析中的工作赋予直觉的意义并作出指导. Monge常被看成是一个几何学家，但这是因为，他正工作在几何已经枯竭的时代，他指出了几何的重要性(至少是为了上述目的)，给几何注入了新的生命力. 事实上，当他觉察到几何之所以还能够发展是因为能用分析对它进行研究时，在1786年发表的一篇论文中，他含蓄地承认分析有更大的重要性. 和其他人一样，他基本上没有去探索新的几何的思想. 他的主要兴趣和最后成果都是在分析工作方面.

关于分析重要的最精采叙述，是Lagrange在他的«分析力学»中作出的，在书的序言中他写道：

> 我们已经有了力学方面的各种专著，但是本书的计划是完全新的. 我曾致力于将这门科学[力学]，以及解决与它有关的问题的技巧，化归为一般性的公式，这些公式的简单推导就给出解决每一个问题所必需的全部方程……. 在这项工作中找不到图形. 我在其中所阐明的方法，既不要求作图，也不要求几何的或力学的推理，而只是一些遵照一致而正规的程序的代数[分析]运算. 喜欢分析的人将高兴地看到力学变为它的一个新的分支，并将感激我扩大了它的领域.

Laplace也强调分析的力量，在他的«宇宙系浅说»中，他说，

> 代数分析把我们的注意力集中到抽象组合上去，很快使我们忘记[我们研究的]主要目标，只是到最后才又回到原来的目标. 但是，当一个人沉湎在分析运算中时，他就被这个方法的普遍性和它的不可估量的优越性引导着，这个优越性体现在它把力学推理转变成几何往往达不到的一些结果. 分析是如此地多产，只需把一些特殊的真

> 理译成这个普遍的语言，就会看到从它们本身的表达中又出现众多新的出乎预料的真理．没有另外一种语言是如此优美，而这些优美之处都是从一长串互相连结并全部出自于同一个基本概念的表达式中产生出来的．因此这个世纪的几何学家[数学家]被它的[分析的]优越性慑服之后，马上致力于扩大它的领域，并把它的边界往后推.[1]

分析的几个特点值得提一下．一方面，Newton 对导数和反微分法的强调仍被保留着，所以很少用到求和的概念．但另一方面，Leibniz 的概念，即导数的微分形式，以及他的记法都变成标准的了（尽管整个世纪中 Leibniz 的微分始终没有确切的意义）．一个函数 $y=f(x)$ 的一阶微分 dy 和 dx 是在十九世纪(第 40 章第 3 节)合法化了的，但是十八世纪的人们自由地使用的高阶微分，甚至到今天都还没有建立在一个严密的基础之上．Leibniz 形式地运用分析式子的传统在十八世纪延续下来了，事实上，还更加强调了这种做法．

赋予分析的这种重要性隐含着十八世纪的人们所没有重视的一些东西．它进一步把数从几何里分离出来，并且含蓄地强调了数系、代数以及分析本身的真正的基础．这个问题在十九世纪开始变得更为突出．特别是，十八世纪的数学家仍然自称为几何学家，这个名词在先前的年代中是流行的，那时候，几何在数学中占着统治地位．

2. 十八世纪工作的推动力

十八世纪的数学工作，远较其他世纪更为直接地受到物理问

(1) Book V, Chap. 5＝*Œuvres*, 6, 465～466.

题的激励. 实际上, 可以说工作的目标不是数学, 而是求解物理问题; 数学是达到物理目的的一种方法. Laplace (虽然也许是一种极端的情况)确实认为数学只是物理的一个工具, 而且他自己所关心的完全是数学对天文学的价值.

物理研究的主要领域当然是力学, 特别是天体力学. 大体上和 Leonardo 预言的一样, 力学成了数学的福地, 因为它提出了如此多的研究方向. 数学与力学问题的牵连是如此地广泛, 以致 d'Alembert在《百科全书》中以及 Denis Diderot (1713～1784) 在他的《关于自然界的解释的思想》(*Pensées sur l'interprétation de la nature*, 1754) 中都写了从十七世纪数学时代到力学时代的转变. 实际上, 他们相信象 Descartes, Pascal 和 Newton 那样的人的数学工作已经过时了, 而力学应该是数学家的主要兴趣. 按照他们的观点, 那就只有当数学为物理服务时, 才是普遍有用的. 十八世纪集中精力于离散质量系统的力学和连续介质的力学. 光学暂时被推入幕后.

但是, 实际发生的情况同 Diderot 和 d'Alembert 所坚持的恰好相反. Lagrange 说, 爱好分析的人们会高兴地看到力学变为它的一个分支. 证诸于后来的发展, 我们认为, Lagrange 这样说, 是作出了比较合乎事实的解释. 更概观地说, 由 Galileo 开创并由 Newton 继承的工作方法 (即将基本的物理原理表为定量的数学陈述, 然后利用数学的论证推导出新的物理成果), 已被不可估量地向前推进了. 物理愈来愈数学化, 至少对于那些物理原理已被充分了解的领域是如此. 物理的主要分支日益增多地组织到数学结构中去, 建立了数学物理.

数学不仅开始把科学包括进去, 而且, 部分地是因为在科学和我们今天称之为工程学之间没有明确的界限, 所以数学家们从事于工业技术上的问题, 这是理所当然的事情. 比如, Euler 研究船的设计、帆的作用、弹道学、地图学以及其他一些实际问题. Monge

研究挖掘、填塞并设计风车的叶片，其认真程度与研究任何微分几何或微分方程中的问题一样.

J. F. (Jean-Etienne) Montucla (1725～1799) 在他的《数学史》(*Histoire des mathématiques*, 第二版, 1799～1802) 中把数学分成两部分，一部分"由那些纯粹的抽象的东西组成，另一部分由被称为混合物，或更通常地叫做物理-数学的那些东西组成." 他的第二部分包括那些能用数学方法进行研究和处理的领域，也就是力学，光学，天文学，军用和民用建筑，保险业，声学和音乐. 他把光的折射甚至验光，反光学和透视画法都包括在光学之内. 力学包括动力学和静力学，流体动力学和流体静力学；天文学包括地理学，理论天文学，天体天文学，测时术(例如日晷)，年代学和航海学. Montucla 还把占星学，天文台的建筑和船的设计都包括进去.

3. 证明的问题

物理问题推动了数学的大部分工作，当然并不是十八世纪才特别这样，但是在这一世纪中数学与物理的合并是有决定意义的. 我们已经看到，主要的发展是分析. 但是微积分基础本身不仅不清楚，而且几乎从十七世纪它诞生之日起就一直受到攻击. 十八世纪的思想确实是不严密的、直观的. 分析的任何一个较细致的问题，如级数与积分的收敛性，微分与积分次序的交换，高阶微分的使用，以及微分方程解的存在性问题等等，几乎无人问津. 数学家们之所以能进行工作，完全归功于运算法则是清楚的. 把物理问题用数学形式表达出来之后，学者们就开始工作，新的一套方法和结论就涌现出来. 数学本身肯定是纯形式的. Euler 完全被公式迷住了，以致他一看到公式，就情不自禁地要对它们进行演算. 数学家们怎么能够敢于只应用法则，而又敢于断言他们的结论是可靠的呢？

数学的物理意义引导着数学的步骤，而且时常提供部分论据，以填补那些非数学的步骤. 推理本质上无异于一条几何定理的证明，其中使用了一些从图形看来完全是显然的事实，尽管没有公理或定理作为它们的依据. 最后，结论在物理上的正确性保证了它在数学上也必定是正确的.

十八世纪的数学思想中有另外一个因素支持了这种论证. 人们对符号的信任远远超过对逻辑的信任. 因为无穷级数对于 x 的一切值都有同一个符号形式，所以对应于级数收敛的 x 值，和对应于级数发散的 x 值之间的区别，看来不需要注意. 而且即使他们认识到有些级数，例如 $1+2+3+\cdots$，有一个无穷大的和，但他们宁愿试图给和数赋予一种意义，而不愿意对求和法提出疑问.

同样地，复数的自由使用也是立足于对符号的信任. 因为二次式 ax^2+bx+c 在其零点是实数时可以表成线性因式的乘积，所以，同样清楚的是：当零点是复数时，也应该有线性因式存在. 尽管数学家们意识到他们自己对微积分的一些概念还不太清楚，但是微积分(微分与反微分)的形式运算却被扩大到新的函数. 对形式主义的这个依赖性或多或少地蒙蔽了他们. 例如在他们扩大他们的函数概念时就遇到了困难，这是由于他们对函数必定能用公式表出这一点奉若神明的缘故.

十八世纪的人们完全清楚数学上对证明提出的要求. 我们已经看到，Euler 就曾试图证明他使用发散级数是正当的，Lagrange 以及其他一些人也曾表示要给微积分提供一个基础. 不过，这为数很少的想要达到严密性的努力，并没有使这一世纪的工作逻辑化，但它们还是值得注意的，因为它们表明了严密化的标准是随时代而变的；而且人们差不多总是持这样的意见：没有办法的事就得忍耐. 他们完全陶醉于已取得的物理成就，以致在绝大部分情况下，对失去的严密性无动于衷. 令人吃惊的是，在理论完全没有保证的情况下，却还极端地相信结论. 因为十八世纪的数学家们在

没有逻辑支持的情况下，愿意如此勇敢地冲杀向前，所以这段时期被称为数学的英雄年代.

或许是由于使微积分严密化的少数努力没有成功，而且随后的分析工作又提出了其他一些毫无希望获得解决的严密性问题，所以有些数学家放弃了这方面的努力，正象寓言中的狐狸对葡萄那样，有意地嘲笑希腊人的严密性. Sylvestre-François Lacroix (1765～1843)在他的第二版 (1810～1819) 的三卷本《微积分学教程》第一卷的序言(第11页)中写道，“希腊人所烦恼的这种琐碎的东西；我们不再需要了.”这个世纪的典型态度是：为什么要自找麻烦，用深奥的推理来证明那些人们根本没有怀疑过的东西呢？或者用不太显然的东西去证明较为显然的东西呢？

甚至欧几里得几何也遭到批评，理由是在一些没有一个人认为有必要的地方，提供了证明. Clairaut 在他的《几何要义》(*Eléments de géométrie*, 1741) 中说，

> Euclid 自找麻烦地去证明什么两个相交的圆的圆心是不同的啦，什么一个被围于另一三角形内的三角形，其各边之和小于外围三角形的各边之和啦，这是不足为怪的：这位几何学家必须去说服那些顽固不化的诡辩论者，而这些人是以拒绝最明显的真理而自豪的；因此，象逻辑那样，几何必须依赖形式推理去反驳他们……. 但现在局面倒转过来了. 所有那些涉及到常识早已熟知的事情的推理，只能掩盖真理，使读者厌倦，在今天人们对它已不屑一顾了.

Josef Maria Hoene-Wronski (1778～1853) 也表达过这种十八世纪的看法，他是一个计算方法学家，但不关心数学的严密性. 他的一篇论文被巴黎科学院的一个委员会批评为缺乏严密性；Wronski 回答说，这是“迂腐，一种偏爱手段而忽视目的的

迂腐."

总的说来，人们是知道他们对严密性掉以轻心的. 1743 年 d'Alembert说,"直到现在……,表现出更多关心的是去扩大建筑，而不是在入口处张灯结彩；是把房子盖得更高些，而不是给基础补充适当的强度."由此，十八世纪开垦了新的处女地. 鉴于做工作的人数有限，这个世纪中伟大的创造大大超过其他任何一个世纪. 十九和二十世纪的人们倾向于看不起十八世纪粗糙的、常常是经不住考验的归纳性工作，强调数量过于庞大，抓住其中的错误,来尽量贬低它的成就.

4. 形而上学的基础

虽然数学家们确实认识到他们的创作并没有用 Euclid 的演绎模式重新系统地陈述出来，但他们坚信数学的真理. 这个信念的部分依据，就是前已指出的，结论在物理上的正确性，部分依据是哲学和神学的理由. 因为数学只不过是把宇宙的数学设计揭示出来，所以它的真理是无可怀疑的. 十七世纪后期和十八世纪的哲学主旨，主要是由 Thomas Hobbes, John Locke 和 Leibniz 阐述过的，是理智与自然界之间预先建立的协调一致性. 这个教义从希腊时代以来确实是没有争议的. 那末，如果这样清楚地适用于自然界的数学定律却缺乏纯数学证明的确切性，那不需要一个遁词吗？虽然十八世纪揭示的仅仅是一些零碎的东西，但它们是基础真理的碎片. 数学演绎法的非凡的准确性，特别表现在天体力学上，是这个世纪相信宇宙数学设计的一个光荣的坚信礼.

十八世纪的人们同样相信某些数学原理必定正确，因为宇宙的数学设计一定已经把它们吸收进去了. 譬如说，由于一个完美的宇宙不会容忍浪费，所以它的行动是达到目的所必需的最少的行动. 因此,Maupertuis 所断言的并由 Euler 在他的《发明方法》

中所支持的最小行动原理，是勿容置疑的.

世界是按照数学进行设计的这一信念来自科学与神学早期的联系. 我们可以回忆一下，十六和十七世纪的领袖人物不仅笃信宗教，而且还在他们的神学观点中寻找对他们的科学工作生死攸关的启示和信念. Copernicus 和 Kepler 确信日心说必定是正确的，是因为他们确信上帝更喜爱数学上比较简单的理论. Descartes 相信我们的天赋观念(其中包括数学公理)是正确的，而且我们的推理是正确的，是基于他深信上帝不会欺骗我们，因而否定数学的真理及其清晰性就是否定上帝. 我们已经提到过，Newton 认为他的科学成就的主要价值在于对上帝的工作的研究和对天启教的支持. 他著作中的许多段落是对上帝的赞美，他的«原理»第三卷末尾的总注释的大部分是对上帝的颂词(它使人联想到 Kepler 对上帝的颂词). Leibniz 关于真实世界与数学世界之间一致性的解释，和他对于他的微积分可以应用到现实世界的最后的辩护词是：世界与上帝是统一的. 因此现实的规律不能偏离数学的理想的规律. 宇宙是尽善尽美的，是所有可能有的世界中最美好的世界，而且是理性的思想揭示了它的规律.

虽然仍旧相信自然界是数学地设计的，但十八世纪最终抛弃了这个信念的哲学及宗教的基础. 整个哲学思想的核心，即宇宙是上帝设计的这一教义，逐渐地被纯粹数学-物理的解释削弱了它的基础. 甚至推动数学工作的宗教方面的势力在十七世纪时就开始失去地盘. Galileo 曾响亮地号召来一个决裂. 他在一封信中说道，“可是，对我说来，关于神圣经典的任何讨论都可能是永远没有用的谎话连篇，没有一个正正经经的天文学家或科学家曾做过这类事情.”后来 Descartes 主张自然规律是不变的，因而含蓄地限制了上帝的作用. Newton 把上帝的行动限制为：保持世界按计划行事. 他用了一个比喻：造表的人负责表的修理. 于是归于上帝的作用越来越受到限制. 当对天上和地上的运动都适合的普遍

定律(这是 Newton 自己揭示的)开始在理性活跃的舞台上占统治地位，而预言和观察不断相符说明这些规律是完善的时候，上帝就越来越退到幕后，而宇宙的数学规律开始成为注意力的焦点. Leibniz 看到 Newton 的《原理》中隐含了一个按照计划运转或者说没有上帝的世界，就指责这本书是反基督的. 但是十八世纪的数学愈往前发展，来自宗教的对数学的启示和推动就越来越后退.

同 Maupertuis 和 Euler 不一样，Lagrange 否定在最小作用原理中隐含有任何形而上学的东西. 关心得到物理上意义重大的结果代替了关心上帝的设计. 对于数学物理说来，完全抛弃上帝及任何建立在它的存在性上的形而上学原理是 Laplace 作出的. 有这样一个被人们熟知的故事：当 Laplace 送给 Napoleon 一部他著的《天体力学》时，Napoleon 说："Laplace 先生，他们告诉我，你写了这部关于宇宙系统的大作，而从头到尾没有一处提到它的创造者."据说 Laplace 答道："我不需要这个假设."这个世纪快接近尾声的时候，对一段议论贴上一个"形而上学"的标签已变成责备的话，虽然这个标签常被用于谴责数学家们不理解的东西. 如 Monge 的同时代人不懂他的特征函数理论，这个理论就被称为是形而上学的.

5. 数学活动的扩张

在十八世纪中，发起并支持数学研究的，与其说是大学，不如说是十七世纪中期和末期建立起来的科学院. 科学院还支持办杂志，使其成为发表新的工作的正式渠道. 科学院事务方面的唯一变化是 1795 年巴黎科学院改组为法兰西学院下设三个分支中的一个.

1800 年以前，德国的大学不作研究. 它们提供两年人文科学的必修课，然后是法律、神学或医学的专门化课. 大数学家不属

于大学，而是归属柏林科学院．但在1810年，Alexander von Humboldt(1769～1859)建立了柏林大学并提出一个基本的思想：教授应该讲授他们想讲的课程，而学生可以学习他们喜欢学习的东西．因此教授第一次可以按照他们的研究兴趣授课．比如Jacobi从1826年起在科尼西堡(Koenigsberg)讲授他的关于椭圆函数的工作，虽然这仍然是很稀有的，而且其他教员必须负担自己的正规课程．十九世纪时德国的许多王国、公国和自由城都设立了大学，开始支持搞研究的教授．

十八世纪时法国的大学，至少一直到大革命时期，并不比德国的大学好．但是新政府决定建立高水平的大学，进行教学和研究．这项工作的组织者是Nicolas de Condorcet，他在数学方面有过一些活动．1794年建立的多科工艺学校，以Monge和Lagrange作为它的第一批数学教授．学生为被录取而互相竞争，他们接受培养其为工程师或军官的训练．事实上，课程的数学水平是很高的，因而毕业生能够从事数学研究．通过这种训练和出版的讲义，这所学校产生了广泛而有力的影响．1808年法国政府建立了高等师范学校；它的前身是师范学校，建于1794年，但只持续了几个月．这所新的学校是用来培养教师的，分成两部分：人文科学和自然科学．在这里，学生也为被录取而互相竞争；它也提供高深的课程；学习与研究的条件是好的；学习较好的学生被引导去搞研究．

十八世纪时，欧洲各国在出数学成果的多寡方面差别相当大．领先的国家是法国，其次是瑞士．德国(指德意志各民族而言)相对说来不太活跃，虽然Euler和Lagrange是受柏林科学院支助的．英国也没有什么活力，Brook Taylor、Matthew Stewart (1717～1785)和Colin Maclaurin是仅有的几位卓越的数学家．英国的这种可怜的状况，与它在十七世纪时巨大的活动性相比，是令人难以置信的，但这是容易找到解释的．英国的数学家，不仅仅因为Newton和Leibniz的争吵所造成的后果，而把他们每一个人孤立

于大陆上的人们之外，而且因为他们遵循 Newton 的几何方法而受到损害. 英国人专心致志于研究 Newton，而不是研究自然界. 甚至在他们的分析工作中，他们用 Newton 表示流数和流量的记号，而拒绝阅读任何用 Leibniz 的记号写的东西. 另外，在牛津和剑桥，甚至不容许任何一个犹太人或不信英国国教的人入学. 大约在 1815 年前后，英国数学已奄奄一息了，天文学也差不多是这样.

在十九世纪的前四分之一的时期内，英国数学家开始对在大陆上迅猛发展的微积分及其扩展的工作感兴趣. 1813 年剑桥成立了分析学会，研究这项工作. George Peacock (1791～1858), John Herschel (1792～1871), Charles Babbage 以及另外一些人从事于研究"d-主义"的原理——即微积分中 Leibniz 用的符号(与"点-状态"原理，或 Newton 所用的符号相对立). 不久，商 dy/dx 代替了 $\dot{y}$，而且英国的学生开始能得到大陆上用的教科书. Babbage, Peacock 和 Herschel 翻译并在 1816 年出版了 Lacroix 的«教程»的一卷版本. 到 1830 年前后，英国人已经能够参加到大陆上的人的工作中去了. 英国的分析，被证实大部分是数学物理，虽然几个完全新的工作方向(代数不变量理论和形式逻辑)也是在这个国家开创的。

6. 向前的一瞥

我们知道，到十八世纪末尾的时候，数学家们已开创了一些新的数学分支. 但是这些分支中的问题变得极其复杂，而且除了少数例外，都没有找到解决它们的一般的方法. 数学家们开始感到山穷水尽了. 1781 年 9 月 21 日，Lagrange 在给 d'Alembert 的信中说："在我看来似乎[数学的]矿井已挖掘很深了，除非发现新的矿脉，否则迟早势必放弃它. 现在物理和化学提供了最辉煌的财

富，它们也比较容易开发；我们这一世纪的嗜好看来也是完全在这个方向上，而且科学院中几何学的处境将会有一天变成目前大学里阿拉伯语的处境一样，那也不是不可能的．"[2] Euler 和 d'Alembert 同意 Lagrange 的意见，认为数学的思想已差不多快穷尽了，他们看到没有新的伟大智能的人物从地平线上出现．这种恐惧甚至早在 1754 年 Diderot 在《关于自然界的解释的思想》中就已经表述过："我敢说，不出一个世纪，欧洲就将剩不下三个大的几何学家[数学家]了．这门科学很快就将停滞不前，停留在 Bernoulli 们，Maupertuis 们，Clairaut 们，Fontaine 们，d'Alembert 们和 Lagrange 们把它发展到的那个地方．……我们将不能越过那个地方．"

Jean-Baptiste Delambre (1749～1822) 是法兰西学院数学和物理部的常设书记，他在一份报告《关于 1789 年以来数学科学进展的历史及其现状的报告》(*Rapport historique sur le progrès des sciences mathématiques depuis 1789 et sur leur état actual*, 巴黎, 1780) 中说："至于未来能给数学的进展提供什么机会，要对此作分析，那会是困难的和轻率的；在它的几乎所有的分支里，人们都被不可克服的困难阻挡住了；把细微末节完善化看来是剩下来的唯一可做的事情了．所有这些困难好象是宣告我们的分析的力量实际上已经穷竭了……．"

比较聪明的预言是 1781 年 Condorcet 作出的，Monge 的工作曾给他以深刻的印象．他说：

> ……虽然如此多的工作时常获得圆满的成功，但是我们还远远没有穷尽分析在几何上的所有的应用，不应该相信什么我们已经接近了这些科学必定会停止不前的终点（因为它们已经达到了人类精神力量的极限），我们应该

(2) Lagrange, *Œuvres*, 13, 368.

> 公开声称，我们仅仅是踏在万里征途的第一步上．这些新的［实际的］应用（与它们对自身可能有的用处是无关的），一般说来对分析的进步是必需的；它们产生了人们也许想不到要提出的一些问题；它们要求创造新的方法．技术解决的方法是应运而生的；对于最抽象的科学的方法，也可以这样说．但是我们把更高级的一种需要归于后者，需要发现新的真理，需要更好地了解自然界的规律．
>
> 于是人们看到长期搁置不用的一些卓越的理论忽然变成了一些最重要的应用的基础，而类似地，一些貌似简单的应用产生了最抽象的理论的概念，对于这些概念也许没有人感觉到有需要，而这些应用把几何学家［数学家］的工作引导到了这些理论上去……．

Condorcet 当然是正确的．其实，数学在十九世纪的扩展还更超过了十八世纪．1783 年，Euler 和 d'Alembert 都去世了，这一年，Laplace 三十四岁，Legendre 三十一岁，Fourier 十五岁而 Gauss 只有六岁．

至于新的数学究竟是什么？我们将在随后的几章中看到．但在这里我们将提到一些传播成果（这些成果，我们将在以后谈到）的媒介．首先是科研杂志数量的一个巨大的膨胀．《多科工艺学校杂志》(*Journal de l'Ecole Polytechnique*) 和学校同时创立．1810 年 Joseph-Diez Gergonne (1771～1859) 创办了《纯粹与应用数学记事》(*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*)，一直持续到 1831 年．这是第一个纯数学的杂志．与此同时 August Leopold Crelle (1780～1855，他是一个值得注意的人物，因为他是一个很好的组织者，并且帮助许多年青人获得了大学里的位置）在 1826 年创办了《纯粹与应用数学杂志》(*Journal für die reine und*

angewandte Mathematik)[3]，Crelle 用这个名称是想表示他愿意扩大数学兴趣的范围．但是不管 Crelle 的意图如何，这个杂志很快就被专业化的数学文章全部占据，因而曾常常被戏称为«纯粹非应用数学杂志»（*Journal für reine unangewandte Mathematik*）．这份杂志也被叫做«Crelle 杂志»（*Crelle's Journal*），而且从 1855 年到 1880 年，它被叫做«Borchardt 的杂志»（*Borchardt's Journal*）．1795 年«科学院纪要»（*Mémoires de l'Académie des Sciences*）变为«法兰西学院的科学院记要»（*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*）．巴黎科学院在 1835 年也创办了«周报»（*Comptes Rendus*），在四页或更少一些的纸上摘要写出新的成果．有一个未曾考证确凿的故事说，之所以限制为 4 页，是要限制 Cauchy，因为他总是写得很多．

1836 年 Liouville 创办了与«Crelle 杂志»类似的法文杂志«纯粹与应用数学杂志»（*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*），通常被叫做«Liouville 杂志»（*Liouville's Journal*）．1864 年 Louis Pasteur（1822～1895）创办了«高等师范学校科学纪事»（*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*），1870 年 Gaston Darboux（1842～1917）创办了«数学科学通报»（*Le Bulletin des Sciences Mathématiques*）．在浩繁的其他杂志中，我们提一下«数学记事»（*Mathematische Annalen*, 1868），«数学学报»（*Acta Mathematica*, 1882）和«美国数学杂志»（*American Journal of Mathematics*），这是美国的第一个数学杂志，是由 J. J. Sylvester 在 1878 年建立的，当时他是约翰·霍普金斯大学（Johns Hopkins University）的教授．

十九世纪以来存在着另外一种促进数学研究积极性的力量．有几个国家的数学家组成专业性的学会，例如伦敦数学会（这是第一个数学会，建立于 1865 年），法国数学会（1872），美国数学会

(3) 以后简写为 *Jour. für Math.*

(1888)和德国数学会(1890). 这些学会定期开会并宣读论文; 每一个学会都主办一个或几个杂志, 除去前面已经提到的以外, 例如还有《法国数学会通报》(*Bulletin de la Société Mathématique de France*) 和《伦敦数学会会报》(*Proceedings of the London Mathematical Society*).

如以上关于新的组织和新的出版物的概略的含义所示, 在十九世纪中数学巨大地扩展了. 这个扩展之所以有可能, 主要是由于一个个小小的数学家贵族团体被一个个范围大得多的集体所代替. 知识的传播, 使得可能从各个经济阶层涌现出远较过去多得多的学者. 这个趋势甚至在十八世纪就已经开始了. Euler 是一个牧羊人的儿子; d'Alembert 是由一个穷苦家庭抚养长大的私生子; Monge 是一个小商贩的儿子; 而 Laplace 出身于一个农民家庭. 大学参与研究, 教科书的写作, 以及由 Napoleon 开创的对科学家的系统训练, 这一切造就了为数众多的数学家.

参考书目

Boutroux, Pierre: *L'Ideal Scientifique des mathématiciens*, Libraire Felix Alcan, 1920.

Brunschvicg, Léon: *Les Etapes de la philosophie mathématique*, Presses Universitaires de France, 1947, Chaps. 10～12.

Hankins, Thomas L.: *Jean d'Alembert: Science and Enlightenment*, Oxford University Press, 1970.

Hille, Einar: "Mathematics and Mathematicians from Abel to Zermelo," *Mathematics Magazine*, 26, 1953, 127～146.

Montucla, J. F.: *Histoire des mathématiques*, 2nd ed., 4 vols., 1799～1802, Albert Blanchard (reprint), 1960.